Jurnal EurekaMatika

Journal homepage: https://ejournal-science.upi.edu/jem/index
doi: https://doi.org/10.17509/jem.v14i2.1649

Optimasi Geometri Kemasan Kaleng untuk Produksi yang Lebih Hemat: Pemodelan Susunan, Pemakaian Material, dan Dampak Keberlanjutan

Leli Nur Lathifah[1], Iwan Kurniawan[2], Muhammad Taqiyuddin[3], Al Azhary Masta[4]*

[1]SMA Negeri 1 Sumedang, Sumedang, Indonesia
[2]Politeknik STIA LAN Bandung, Bandung, Indonesia
[3]Mathematics Education Unit, Department of Mathematics, University of Auckland, Auckland, New Zealand
[4]Mathematics Study Program, Universitas Pendidikan Indonesia, Bandung, Indonesia

*Correspondence : iwan.kurniawan@poltek.stialanbandung.ac.id

ABSTRAK

Keputusan geometris dalam desain kemasan memengaruhi kebutuhan bahan, ruang penyimpanan, dan sisa produksi. Artikel ini mengkaji tiga persoalan: (i) perbandingan luas permukaan; (ii) minimisasi luas permukaan pada volume yang sama; serta (iii) perbandingan sisa bidang pemotongan tutup dan alas kaleng. Kebaruan kajian terletak pada pembedaan antara luas permukaan produk, luas bidang bahan, dan luas permukaan wadah. Hasil analisis menunjukkan bahwa konfigurasi kardus dengan luas terkecil bergantung pada rasio $\frac{t}{d}$, yaitu $t < d$, $d < t < 3d$, dan $t > 3d$. Pada volume yang sama, tabung tertutup memiliki luas permukaan minimum sekitar 7,8% lebih kecil daripada kubus. Sementara itu, penggunaan pola segi enam beraturan untuk pemotongan tutup dan alas dapat mengurangi sisa bidang sekitar 62,4% dibandingkan pola persegi. Seluruh hasil merupakan kajian analitis berdasarkan geometri ideal, sehingga penghematan biaya dan dampak lingkungan aktual masih memerlukan validasi proses produksi dan penilaian daur hidup.

© 2026 Kantor Jurnal dan Publikasi UPI

INFORMASI ARTIKEL

Sejarah Artikel:
Diterima 24 Oktober 2026
Direvisi 11 November 2026
Disetujui 13 November 2026
Tersedia online 18 November 2026
Dipublikasikan 18 November 2026

Kata Kunci:
Efisiensi Material,
Kemasan Kaleng,
Luas Permukaan Minimum,
Optimasi Geometri,
SDGs.

ABSTRACT

Geometric decisions in packaging design affect material consumption, storage space, and production waste. This article examines three issues: (i) surface area comparison; (ii) surface area minimization for equal volumes; and (iii) comparison of material waste in cutting layouts for can lids and bases. The novelty of this study lies in distinguishing among the surface area of the product, the allocated material area, and the surface area of the container. The results show that the cardboard box configuration with the smallest surface area depends on the ratio $\frac{t}{d}$, namely, $t < d$, $d < t < 3d$, and $t > 3d$. For equal volumes, a closed cylinder has a minimum surface area approximately 7.8% smaller than that of a cube. Furthermore, a regular hexagonal cutting pattern for can lids and bases reduces material waste by approximately 62.4% compared with a square pattern. These findings are based on idealized geometric assumptions; therefore, actual cost savings and environmental impacts require further validation through production processes and life cycle assessment.

© 2026 Kantor Jurnal dan Publikasi UPI

Keywords:
Can Packaging,
Geometric Optimization,
Material Efficiency,
Minimum Surface Area,
SDGs.

1. PENDAHULUAN

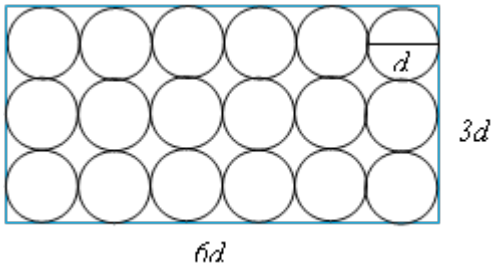
Kemasan sering dipandang sebagai bagian akhir dari proses produksi, padahal keputusan geometris yang dibuat pada tahap desain dapat memengaruhi jumlah bahan baku, biaya pengemasan, ruang penyimpanan, dan kebutuhan transportasi. Dalam literatur pemasaran, kemasan juga dipahami sebagai bagian dari penciptaan nilai produk, bukan sekadar pembungkus (Rundh, 2016). Dalam konteks produksi skala besar, perubahan kecil pada dimensi tabung atau cara memotong tutup dan alas dapat berulang pada jutaan unit. Karena itu, persoalan geometri sederhana dapat menjadi persoalan efisiensi sumber daya yang nyata ketika diterapkan pada skala industri.

Namun, efisiensi kemasan tidak dapat dinilai hanya dari satu ukuran. Luas permukaan produk mengukur bahan yang membentuk badan, tutup, dan alas kaleng dalam model ideal. Luas bidang pembatas atau blank area mengukur bahan yang dialokasikan untuk memotong komponen, sedangkan luas permukaan kardus mengukur bahan wadah untuk mengemas sejumlah kaleng. Ketiga ukuran tersebut berkaitan, tetapi tidak identik. Pengurangan luas permukaan kaleng tidak otomatis menghasilkan kardus yang lebih kecil, sebab ukuran kardus juga ditentukan oleh pola susunan, orientasi kaleng, ruang bebas, dan batasan pengemasan.

Dorongan menuju sistem produksi yang lebih bertanggung jawab memperkuat relevansi persoalan ini. Literatur tentang kemasan dan ekonomi sirkular menekankan bahwa dampak lingkungan tidak ditentukan oleh satu atribut saja, melainkan oleh pilihan material, desain, proses produksi, distribusi, dan pengelolaan akhir masa pakai (Geueke et al., 2018; Molina-Besch & Pålsson, 2016; Prakash & Pathak, 2017). Pendekatan siklus hidup juga mengingatkan bahwa pengurangan material perlu dinilai bersama fungsi perlindungan produk dan konsekuensi di tahapan lain, bukan hanya dari luas bahan pada satu komponen (Licciardello, 2017; Pauer et al., 2019).

Secara matematis, desain kemasan dapat dinyatakan sebagai masalah optimasi dengan kendala. Untuk volume produk yang tetap, luas permukaan tabung bergantung pada jari-jari dan tinggi. Sementara itu, pola susunan sejumlah kaleng dalam kardus berkaitan dengan geometri pengepakan dan dimensi kotak. Literatur tentang pengepakan lingkaran dan optimasi pemotongan menunjukkan bahwa pola geometris dan batasan proses dapat mengubah efisiensi penggunaan ruang maupun bahan (Delorme et al., 2017). Pada tahap produksi, masalah pemotongan juga perlu mempertimbangkan bentuk bahan sisa yang dihasilkan, bukan hanya ukuran komponen akhir.

Kajian awal pada artikel ini akan membahas beberapa persoalan yang saling terkait: Sebagai contoh penyusunan 18 kaleng dalam wadah balok atau ada pola susunan lain yang membuat jumlah susunlan lebih efektif, kemudian kondisi dimensi tabung dengan luas permukaan minimum, perbandingan pola pemotongan persegi dan segi enam untuk tutup serta alas, dan manfaat potensial bagi biaya serta lingkungan.



Gambar 1. Ilustrasi susunan 18 Kaleng dalam kotak

Lebih jauh, persoalan tersebut dalam artikel ini akan di susun satu kerangka analitis dengan tiga tujuan: (1) merumuskan perbandingan beberapa susunan kaleng berdasarkan luas permukaan kotak; (2) menurunkan dimensi optimum tabung untuk model bahan ideal dan dua model pemotongan tutup-alas; serta (3) menjelaskan bagaimana hasil geometris tersebut dapat mendukung evaluasi manfaat ekonomi dan lingkungan. Kontribusi artikel terletak pada penjelasan eksplisit mengenai pengaruh asumsi pemotongan terhadap hasil optimasi, bukan pada klaim bahwa satu desain selalu paling baik untuk semua lini produksi.

Kaitan dengan SDGs terutama berada pada Tujuan 12, yaitu konsumsi dan produksi yang bertanggung jawab, melalui potensi pengurangan sisa bahan dan penggunaan sumber daya. Dampak ekonomi yang mungkin muncul meliputi penghematan bahan baku dan biaya produksi; dampak lingkungan yang mungkin muncul meliputi berkurangnya limbah logam dan kebutuhan material primer. Keduanya merupakan potensi yang diturunkan dari model, bukan dampak terukur, sebab artikel ini tidak menggunakan data pabrik, harga bahan, energi, maupun penilaian daur hidup.

2. METODE

Penelitian ini merupakan kajian matematis analitis. Penelitian tidak melibatkan eksperimen pabrik, pengukuran biaya aktual, atau penilaian daur hidup. Analisis dilakukan dengan menetapkan variabel dan asumsi geometri, membangun fungsi luas dengan kendala volume tetap, menentukan titik kritis melalui turunan, membandingkan fungsi luas secara aljabar, serta menafsirkan hasil sesuai cakupan model.

2.1. Notasi dan asumsi

Untuk kaleng berbentuk tabung, r menyatakan jari-jari alas, t tinggi kaleng, dan V volume yang dipertahankan tetap, sehingga $V = \pi r^2 t$. Untuk susunan dalam kardus, $d = 2r$ menyatakan diameter kaleng. Kotak diasumsikan berupa balok tertutup dengan ketebalan bahan, ruang bebas, toleransi produksi, dan perlindungan tambahan diabaikan. Analisis susunan terbatas pada konfigurasi yang ditampilkan dalam naskah awal; oleh sebab itu, hasil perbandingannya tidak ditafsirkan sebagai bukti optimum global bagi semua kemungkinan susunan.

2.2. Optimasi luas permukaan tabung ideal

Luas permukaan tabung tertutup diberikan oleh jumlah luas dua lingkaran dan selimut tabung. Dengan kendala volume tetap, tinggi dinyatakan sebagai fungsi jari-jari dan disubstitusikan ke fungsi luas $A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi rt$. Dengan volume $V = t \times \pi r^2$ tetap, diperoleh $t = \frac{V}{\pi r^2}$ sehingga $A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}, \quad r > 0$

Turunan pertama dan kedua adalah $A'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}$ dan $A''(r) = 4\pi + \frac{4V}{r^3}$. Persamaan $A'(r) = 0$ menghasilkan $2\pi r^3 = V$. Karena $V = \pi r^2 t$, kondisi tersebut setara dengan $t = 2r$. Turunan kedua $A''(r) = 4\pi + \frac{4V}{r^3}$ bernilai positif untuk $r > 0$, sehingga titik kritis merupakan minimum. Jadi, untuk model tabung tertutup dengan volume tetap dan tanpa memperhitungkan sisa pemotongan, luas permukaan minimum dicapai ketika tinggi sama dengan diameter.

2.3. Model pemotongan tutup dan alas

Pada praktik pemotongan, luas bahan yang dialokasikan untuk tutup dan alas tidak selalu sama dengan luas dua lingkaran karena bentuk kosong di sekeliling lingkaran ikut terpakai atau menjadi sisa. Dua model geometris dibandingkan. Pada model persegi, setiap

lingkaran ditempatkan dalam persegi sisi $2r$, sehingga luas bahan untuk dua ujung adalah $8r^2$. Pada model segi enam beraturan, lingkaran ditempatkan di dalam segi enam beraturan dengan jari-jari lingkaran sebagai apotema; luas satu segi enam adalah $2\sqrt{3}r^2$, sehingga luas dua bidang pembatas adalah $4\sqrt{3}r^2$. Dengan demikian, fungsi luas bahan untuk masing-masing model adalah $Ar = 8r^2 + 2\pi rt = 8r^2 + \frac{2V}{r}$.

$$A_{\bigcirc}(r) = 4\sqrt{3}r^2 + 2\pi rt = 4\sqrt{3}r^2 + \frac{2V}{r}$$

Secara umum, untuk $F(r) = cr^2 + \frac{2V}{r}$, dengan $c > 0$, kondisi $F'(r) = 0$ memberikan $cr^3 = V$. Dengan $V = \pi r^2 t$, persamaan ini setara dengan $\frac{t}{r} = \frac{c}{\pi}$. Dengan demikian, model persegi c = 8 menghasilkan $\frac{t}{r} = \frac{8}{\pi}$. Sedangkan model segi enam, $c = 4\sqrt{3}$ menghasilkan $\frac{t}{r} = \frac{4\sqrt{3}}{\pi}$. Karena $F''(r) = 2c + \frac{4V}{r^3} > 0$, titik kritis pada kedua model merupakan minimum. Rasio tersebut berlaku untuk fungsi luas bahan yang dialokasikan, bukan untuk luas permukaan geometris tabung saja.

2.4. Perbandingan sisa bahan geometris

Sisa geometris untuk satu ujung dihitung sebagai luas bidang pembatas dikurangi luas lingkaran. Untuk pola persegi, sisa adalah $(4 - \pi)r^2$. Untuk pola segi enam, sisa adalah $(2\sqrt{3} - \pi)r^2$. Pengurangan relatif sisa model segi enam terhadap model persegi dihitung sebagai $100\% \times \left[1 - \frac{2\sqrt{3} - \pi}{4 - \pi}\right] \approx 62{,}4\%$. Angka tersebut hanya membandingkan luas bidang pembatas ideal. Perhitungan tidak memasukkan jarak antarpotongan, lebar kerf, cacat lembaran, nesting aktual, atau pemanfaatan ulang bahan sisa. Karena itu, angka ini tidak boleh langsung ditafsirkan sebagai pengurangan limbah aktual di pabrik.

2.5. Model susunan kaleng dalam kardus

Tiga konfigurasi balok dibandingkan. Konfigurasi I memiliki dimensi $6d \times 3d \times t$; konfigurasi II memiliki dimensi $3d \times 3d \times 2t$; konfigurasi III memiliki dimensi $2d \times 3d \times 3t$. Untuk balok tertutup berdimensi x, y, z, luas permukaannya adalah $L = 2(xy + xz + yz)$. Oleh karena itu,

$$L_1 = 2(6d \times 3d + 6d \times t + 3d \cdot t) = 36d^2 + 18dt,$$
$$L_2 = 2(3d \times 3d + 3d \times 2t + 3d \times 2t) = 18d^2 + 24dt, \text{ dan}$$
$$L_3 = 2(2d \times 3d + 2d \times 3t + 3d \times 3t) = 12d^2 + 30dt.$$

Ketiga bentuk tersebut dibandingkan pada nilai d dan t yang sama, dengan tetap memperhatikan bahwa konfigurasi yang layak dipilih bergantung pada orientasi kaleng dan batasan dimensi. Persamaan tersebut digunakan sebagai perbandingan di antara pola yang dianalisis, bukan sebagai enumerasi lengkap seluruh kemungkinan pengepakan.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Perbandingan tiga konfigurasi susunan kaleng

Penyusunan kaleng agar ukuran kotak dapat diperkecil, hal ini berkaitan dengan permasalahan luas permukaan kotak tersebut. Oleh karena itu, permasalahan pertama yang muncul pada pengembangan ini adalah ingin mengetahui bagaimana ukuran kotak yang ekonomis (luas permukaan minimum) tetapi volumenya tetap dengan bentuk alas persegi panjang, seperti kotak wadah kaleng pada Gambar 1. agar penyusunan kaleng dalam kotak tersebut efektif. Pembahasan pada kotak dengan bentuk alas persegi panjang diawali dengan

diketahui volume dan tinggi kotak. Akan dihitung beberapa ukuran panjang dan lebar kotak yang dapat meminimalkan bahan yang dipakai untuk membuat kotak.

Jika ada sebuah kotak yang akan dibuat dengan volume V_2 dan tinggi t, maka dapat dicari ukuran yang dapat meminimalkan bahan yang diperlukan sehingga luas permukaannya minimum. Misalkan kaleng mempunyai panjang *p* dan lebar *l*. Kotak dengan alas persegi panjang tersusun dari dua buah persegi panjang yang berfungsi sebagai alas dan tutup serta sebuah selimut. Luas permukaan kotak dengan alas persegi panjang dapat ditentukan dengan menggunakan rumus:

$$A_2 = 2pl + 2pt + 2lt = 2(pl + pt + lt)$$

dimana A_2 adalah luas permukaan kotak dengan alas persegi panjang.

Cara yang dapat dilakukan untuk mendapatkan jawabannya adalah ubah fungsi A_2 menjadi fungsi satu variabel dalam p. Sehingga variabel l harus diganti dengan variabel yang mengandung p. Karena, $V_2 = p \times l \times t$ maka $l = \frac{V_2}{p \times t}$.

Dengan asumsi V_2 dan t adalah konstan, substitusikan l ke dalam persamaan luas, didapat

$A_2 = 2\left(p\left(\frac{V_2}{p\times t}\right) + pt + \left(\frac{V_2}{p\times t}\right)t\right) = 2\left(\left(\frac{V_2}{t}\right) + pt + \left(\frac{V_2}{p}\right)\right)$.

Sehingga fungsi yang akan diminimumkan adalah

$$A_2(p) = 2\left(\left(\frac{V_2}{t}\right) + pt + \left(\frac{V_2}{p}\right)\right), \qquad t, p > 0$$

Untuk menemukan titik kritis, harus dicari $A_2'(p) = 0$.

$$A_2'(p) = 0 \Leftrightarrow 2(t - \left(\frac{V_2}{p^2}\right)) = 0 \Leftrightarrow \frac{2tp^2 - 2V_2}{p^2} = 0 \Leftrightarrow 2tp^2 - 2V_2 = 0.$$

Diperoleh $p = \sqrt{\frac{V_2}{t}}$. Nilai l yang sesuai dengan $p = \sqrt{\frac{V_2}{t}}$ adalah $l = \frac{V_2}{p\times t}$.

$$l = \frac{V_2}{\sqrt{\frac{V_2}{t}} \times t} = \sqrt{\frac{V_2^2}{\frac{V_2}{t} \times t^2}} = \sqrt{\frac{V_2}{t}} = p$$

Sehingga, untuk menentukan luas permukaan kotak dengan alas persegi panjang agar minimum dengan $l = \frac{V_2}{p\times t}$ maka haruslah $l = p$. Jadi, jika diketahui V_2 dan t konstan maka agar luas permukaan kotak minimum maka haruslah panjang sama dengan lebar.

Sekarang, kita sudah mendapatkan bentuk kotak yang luas permukaan minimum dengan diketahui volume dan tinggi konstan, yakni haruslah alas berbentuk persegi ($l = p$). Namun, permasalahan di atas masih terbatas dengan tinggi kotak (*t*) yang diketahui (konstan). Bagaimana dengan *t* yang sembarang? Setelah didapatkan perbandingan panjang dan lebar yakni $l = p$, akan dicari perbandingan panjang, lebar, dan tinggi agar luas permukaan kotak minimum.

Perhatikan bahwa, diketahui $l = p$. Substitusikan $l = p$ ke dalam persamaan luas dan volume, diperoleh $A_2 = 2p^2 + 2pt + 2pt = 2(p^2 + 2pt)$ dan $t = \frac{V_2}{p^2}$.

$$A_2 = 2p^2 + 2pt + 2pt = 2(p^2 + 2pt) = 2\left(p^2 + 2p\left(\frac{V_2}{p^2}\right)\right) = 2\left(p^2 + 2\left(\frac{V_2}{p}\right)\right)$$

Sehingga fungsi yang akan diminimumkan adalah

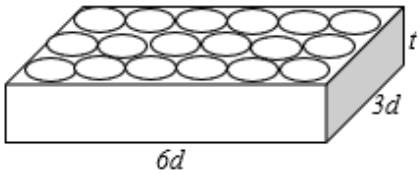
$$A_2(p) = 2(p^2 + 2\left(\frac{V_2}{p}\right)), \qquad p > 0$$

Untuk menemukan titik kritis, harus dicari $A_2'(p) = 0$.

$$A_2'(p) = 0 \Leftrightarrow 2\left(2p - 2\left(\frac{V_2}{p^2}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{4p^3 - 4V_2}{p^2} = 0$$

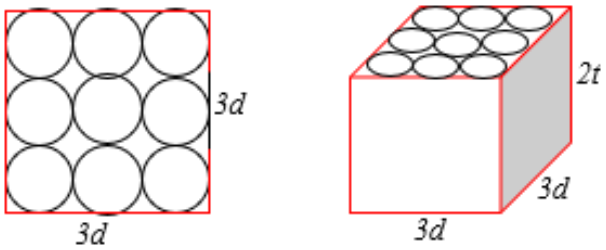
Diperoleh $4p^3 - 4V_2 = 0$. Disubstitusikan $V_2 = p^2 \times t$ ke persamaan $4p^3 - 4V_2 = 0$, diperoleh $4p^3 - 4V_2 = 4p^3 - 4(p^2 \times t) = 0 \Leftrightarrow 4p^2(p - t) = 0$

Akibatnya, $p = t$, untuk menentukan luas permukaan kotak dengan alas persegi panjang agar minimum dengan $p = l$ maka haruslah $p = t = l$. Dari analisa di atas, salah satu susunan 18 kaleng agar kotak dapat diperkecil ditampilkan pada Gambar 2 yang mempunyai luas permukaan kotak $L_1 = 36d^2 + 24dt$.



Gambar 2. Susunan 18 Kaleng dalam Balok

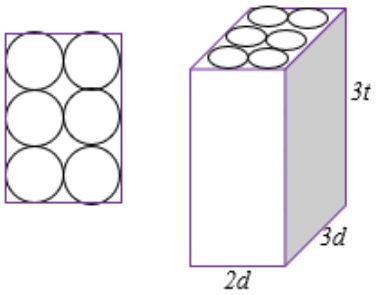
Susunan 18 kaleng agar kotak dapat diperkecil ditampilkan pada Gambar 3. Dari bentuk kotak Gambar 3, diperoleh luas permukaan kotak adalah $L_2 = 18d^2 + 24dt$. Namun, permasalahan ini belumlah selesai. Faktanya, dipasaran ukuran diameter dan tinggi kaleng bermacam-macam. Hal itu akan mempengaruhi susunan kaleng. Jika diameter kaleng lebih panjang daripada tinggi kaleng ($d > t$) apakah susunan seperti pada Gambar 2 sudah efektif? atau, sebaliknya jika diameter kaleng lebih kecil dari tinggi kaleng ($d < t$) apakah susunan kaleng di atas sudah efektif?



Gambar 3. Susunan 18 Kaleng dalam Kubus

Susunan lain yang mungkin untuk menyusun 18 kaleng dengan alas kotak berbentuk persegi panjang disajikan pada Gambar 4. Jika susunan kalengnya seperti Gambar 4 maka diperoleh luas permukaan kotak adalah $L_3 = 12d^2 + 30dt$. Dari hasil analis didapat Selisih luas antar konfigurasi adalah

1. $L_1 - L_2 = 6d(3d - t)$,
2. $L_3 - L_2 = 6d(t - d)$,
3. $L_1 - L_3 = 12d(2d - t)$.



Gambar 4. Susunan 18 Kaleng dalam Balok tegak

Karena $d > 0$ dan $t > 0$, tanda ketiga selisih tersebut memberikan hasil berikut untuk tiga konfigurasi yang dianalisis:

1. Jika $t < d$, maka L_3 lebih kecil daripada L_1 dan L_2.
2. Jika $d < t < 3d$, maka L_2 lebih kecil daripada L_1 dan L_3.
3. Jika $t > 3d$, maka L_1 lebih kecil daripada L_2 dan L_3.

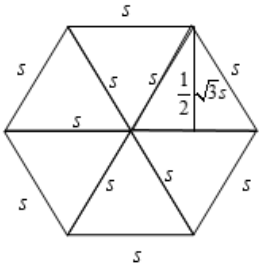
Pada batas $t = d$, $L_2 = L_3$; pada batas $t = 3d$, $L_1 = L_2$. Dengan demikian, pernyataan bahwa satu konfigurasi selalu paling efektif tidak tepat. Konfigurasi dengan luas kardus terkecil di antara tiga pola tersebut bergantung pada rasio $\frac{t}{d}$.

Perlu ditekankan bahwa hasil ini bukan optimum global. Sebagai contoh, susunan 18 kaleng dalam satu kolom menghasilkan wadah berdimensi $d \times d \times 18t$ dengan luas permukaan $L_4 = 2d^2 + 72dt$. Jika $t = \frac{d}{10}$, maka $L_4 = 9{,}2d^2$, sedangkan $L_3 = 15d^2$. Contoh ini menunjukkan bahwa penentuan susunan paling hemat secara global memerlukan pembandingan terhadap lebih banyak konfigurasi serta pertimbangan kestabilan tumpukan, kemudahan penanganan, dan batasan transportasi.

3.2. Susunan Kaleng dengan Alas Bidang Segi-enam

Pada Subbab 3.1 telah dibahas bagaimana susunan kaleng dengan alas berbentuk segiempat. Pada bagian ini, akan dilihat dari persepektif lain bagaimana susunan kaleng dengan alas segienam. Berdasarkan Gambar 1, luas persegi panjang yang menjadi wadah kaleng yang berdiameter (d) adalah $18d^2$. Jumlah susunan kaleng yang dapat dimuat adalah 18 kaleng dengan total luas adalah $\frac{18}{4}\pi d^2$, artinya selisih area tersisa dengan susunan tersebut adalah $18d^2 - \frac{18}{4}\pi d^2 = \left(18 - \frac{18}{4}\pi\right) d^2$.

Perhatikan bahwa $\pi d^2 > \left(18 - \frac{18}{4}\pi\right) d^2 > \frac{1}{4}\pi d^2$. Akibatnya, area dengan luas $18d^2$ masih memungkinkan untuk memuat kaleng dengan luas alas $\frac{1}{4}\pi d^2$. Kerena itu, penulis tertarik untuk mencoba menentukan susulan lain yang luasnya $18d^2$ namun memuat lebih dari 18 kaleng. Salah satu contoh yang mungkin adalah segienam beraturan dengan Panjang sisi $2d\sqrt[4]{3}$.



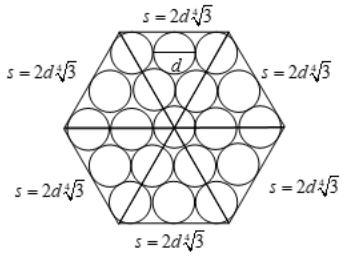
Gambar 5. Pembagian Segi Enam Beraturan Menjadi Enam Segitiga Sama Sisi

Berikut akan dijelaskan bagaimana susunan kalengnya dan berapa banyak kaleng yang bisa disusun pada segi enam sama sisi dengan luas $18d^2$. Perhatikan ilustrasi pada Gambar 5. Di lain pihak, karena luas segi enam sama sisi di atas adalah $18d^2$, dan berlaku

$$18d^2 = 6\left(\frac{1}{2} \times s \times \frac{1}{2}\sqrt{3}s\right) = \frac{6}{4}\sqrt{3}s^2$$

sehingga, $s^2 = \frac{18d^2 \times 4}{6\sqrt{3}} = \frac{12d^2}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}d^2$, maka diperoleh $s = 2d\sqrt[4]{3}$. Adapun bentuk susunan kaleng dengan berdiameter (*d*) yang memuat lebih banyak kaleng disajikan pada Gambar 6 dengan banyak kaleng yang bisa disusun adalah 19 kaleng. Apakah hal ini mungkin? Tentu hal

ini masih memungkinkan dikarenakan jumlah 19 kaleng memiliki total luas $\frac{19}{4}\pi d^2$yang masih lebih kacil dari $18d^2$.



Gambar 6. Konfigurasi Susunan 19 Kaleng pada Segi Enam Beraturan

Perhitungan ini menentukan ukuran segi enam berdasarkan luas bidang yang ditetapkan, tetapi tidak dengan sendirinya membuktikan jumlah kaleng yang maksimum atau susunan yang paling efektif. Untuk menyatakan kapasitas maksimum, perlu ditetapkan secara eksplisit bahwa setiap lingkaran berdiameter d harus berada sepenuhnya di dalam bidang, tidak saling tumpang tindih, dan memenuhi batas tepi. Oleh karena itu, jumlah 19 kaleng yang ditunjukkan dalam ilustrasi dipahami sebagai contoh susunan yang layak pada gambar, namun belum sebagai bukti optimum pengepakan global. Hanya saja dengan luas yang sama seperti bentuk alas persegi Panjang, bentuk alas segienam memuat kaleng lebih banyak.

3.3. Penentuan Bentuk Kaleng dengan Alas Bidang Lingkaran

Misalkan volume dari kaleng telah diketahui. Apabila proses manufakturingnya diabaikan, maka konsep minimum berkaitan dengan luas permukaan tabung yang akan digunakan. Semakin minimum luas permukaan maka semakin sedikit bahan yang digunakan. Selain itu, semakin minimum luas permukaan kaleng maka semakin kecil kotak yang dibutuhkan sebagai wadah menyusun kaleng tersebut. Jika ada sebuah kaleng yang akan dibuat dengan volume V_1, maka dapat dicari aturan dari ukuran kaleng yang dapat meminimalkan bahan pembuatan kaleng tersebut. Misal, kaleng memiliki tinggi *t* dan jari-jari lingkaran atas dan bawah adalah *r* dan A_1 adalah luas permukaan kaleng, maka didapat $A_1 = 2\pi r^2 + 2\pi rt$.

Untuk mendapatkan suatu aturan yang memenuhi konsep minimum dapat dicari dengan langkah sebagai berikut. Ubah fungsi A_1 menjadi fungsi satu variabel, yaitu *r*. Sehingga, variabel *t* harus diganti dengan variabel yang mengandung *r*. karena $V_1 = \pi r^2 t \rightarrow t = \frac{V_1}{\pi r^2}$ maka diperoleh:

$$A_1 = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{V_1}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2V_1}{r}$$

Sehingga, fungsi yang akan diminimumkan adalah:

$$A_1(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V_1}{r}, r > 0$$

Untuk menemukan titik kritis, diperoleh:

$$4\pi r - \frac{2V_1}{r^2} = \frac{2(2\pi r^3 - V_1)}{r^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2(2\pi r^3 - V_1)}{r^2} = 0 \Leftrightarrow 2\pi r^3 - V_1 = 0.$$

Akibatnya, $r = \sqrt[3]{\frac{V_1}{2\pi}}$. Nilai *t* yang berkorespondensi dengan $r = \sqrt[3]{\frac{V_1}{2\pi}}$ adalah

$$t = \frac{V_1}{\pi r^2} = \frac{V_1}{\left(\frac{{V_1}^2}{4}\pi\right)^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{{V_1}^3}{{V_1}^2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4V_1}{\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{V_1}{2\pi}} = 2r.$$

Sehingga, untuk meminimumkan luas permukaan kaleng didapat $r = \sqrt[3]{\frac{V_1}{2\pi}}$ dan t bernilai dua kali *r*. Artinya, tinggi dari kaleng sama dengan diameter lingkaran.

3.4. Perbandingan Antara Luas Permukaan Kaleng dengan Alas Bidang Persegi Panjang dan Lingkaran

Pada pembahasaan sebelumnya diperoleh bahwa bahan yang digunakan dalam pembuatan kaleng dengan alas lingkaran akan minimum jika tinggi kaleng sama dengan diameternya, atau $h = 2r$ dan kaleng dengan bentuk alas persegi panjang akan mencapai luas permukaan minimum jika $p = t = l$. Namun, permasalahan tidak hanya berhenti sampai disana saja. Penulis tertarik untuk menentukan mana yang lebih minimum antara kaleng dengan alas persegi panjang atau kaleng dengan alas lingkaran dengan volume yang tetap? Misalkan diberikan volume $V = \pi r^2 t$, Perhatikan kasus-kasus berikut

1. Kaleng dengan bentuk alas lingkaran. Jika A_1 adalah luas permukaan kaleng, maka:

$$A_1 = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

Substitusikan $h = 2r$ ke persamaan di atas, diperoleh:

$$A_1 = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r(2r) = 6\pi r^2 = 6\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V_1}{2\pi}}\right)^2 = 6\pi\left(\frac{V_1}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$$

2. Selanjutnya kaleng dengan bentuk alas bidang Persegi dengan volume sama seperti kaleng yakni $\pi r^2 t = V = p \times l \times t$. Telah diketahui bahwa luas permukaan minimum tercapai ketika $p = t = l = d$, maka diperoleh $V = p^3 = (2r)^3 = 8r^3$. Jika A_2 adalah luas permukaan kaleng, maka:

$$A_2 = 2pl + 2pt + 2lt \text{ dan } p = l = t = 2r$$

Substitusikan *p = l = t =* 2*r* ke persamaan di atas, diperoleh:

$$A_2 = 2pl + 2pt + 2lt = 2(pl + pt + lt) = 2(12r^2) = 24\left((V/8)^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 6V^{\frac{2}{3}}$$

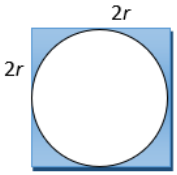
Dengan demikian, rasio luas minimum tabung terhadap kubus adalah $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 0{,}922$. Artinya, pada volume yang sama, tabung optimum memiliki luas permukaan sekitar 7,8% lebih kecil daripada kubus. Kesimpulan ini dibatasi pada perbandingan dua bentuk yang dianalisis dan tidak dimaksudkan sebagai pernyataan bahwa salah satunya merupakan bentuk paling optimal di antara seluruh bangun ruang.

3.5 Cara Pemotongan Alas dan Tutup Kaleng dengan Alas Bidang Lingkaran

Kenyataan yang ada di lapangan, kebanyakan dari kaleng yang beredar dipasaran memiliki tinggi yang lebih atau kurang dari diameternya. Atau dengan kata lain perbandingan antara *h* dan *r* tidak sama dengan 2. Mengapa itu terjadi ?

Kasus I: Bahan untuk pembuatan kaleng dipotong dari lembaran – lembaran logam. Bagian silinder atau selimutnya dibuat dari persegi panjang yang dipotong dari lembaran logam dengan sedikit bahan yang terbuang atau bahkan tidak ada sisa yang terbuang sama sekali. Sedangkan untuk bagian atas dan bagian dasar yang berbentuk bidang lingkaran, dipotong dari persegi-persegi berukuran 2*r* x 2*r*, seperti pada Gambar 7.

Kasus seperti ini tentunya menyebabkan ada sisa yang terbuang dari pemotongan lingkaran. Andaikan A_l adalah luas lingkaran dan A_p adalah luas persegi, didapat perhitungan sebagai berikut.



Gambar 7. Lingkaran yang termuat dalam Persegi

Amatri bahwa, $A_l = \pi r^2$ dan $A_p = 4r^2$. Sehingga, jika A_s adalah banyaknya sisa yang terbuang maka $A_s = 4r^2 - \pi r^2 = (4 - \pi)r^2$.

Dalam kasus ini, luas total (A) yang digunakan untuk membuat sebuah kaleng adalah

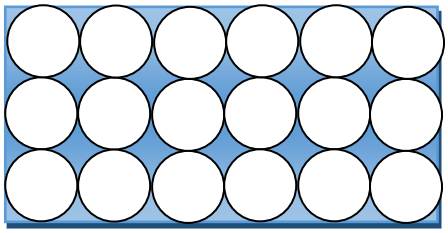
$$A = 2(4r^2) + 2\pi rt$$

dan $A(r) = 2(4r^2) + 2\pi r\frac{V}{\pi r^2} = 8r^2 + \frac{2V}{r}$. Agar bahan logam yang digunakan minimum, kita dapat mencari bagaimana perbandingan antara tinggi (t) dengan jari-jari (r) dengan menggunakan turunan, yakni:

$$A'(r) = 0 \Leftrightarrow 16r - \frac{2V}{r^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{16r^3 - 2V}{r^2} = 0 \Leftrightarrow 16r^3 - 2V = 0.$$

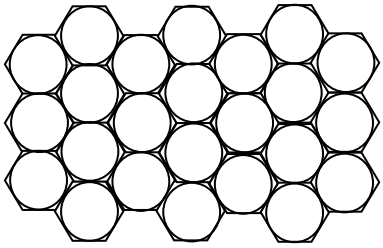
Sehingga diperoleh $\frac{t}{r} = \frac{8}{\pi}$. Oleh karena itu, agar bahan yang digunakan minimum, perbandingan antara *t* dan *r* adalah $\frac{8}{\pi}$.

Kasus II: Pemotongan logam untuk alas dan tutup kaleng yang lingkaran seperti Gambar 8 memberikan banyak sisa material yang terbuang.



Gambar 8. Pemotongan Lempengan Logam berbentuk Lingkaran

Ada cara yang lebih efisien dalam pemotongan bahan untuk mendapatkan lingkaran yang diperlukan. Cara tersebut adalah dengan membagi lembaran logam menjadi segienam–segienam dan membentuk lingkaran dalam yang tepat menyinggung sisi dari segienam tersebut, yang diilustrasikan pada Gambar 9.



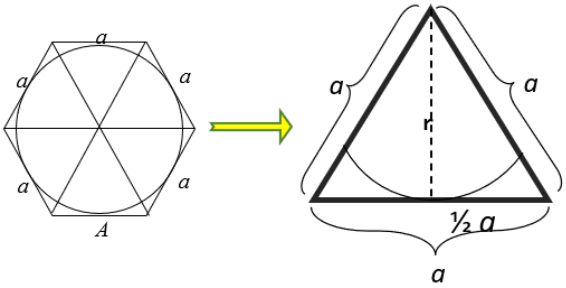
Gambar 9. Susunan Lingkaran pada Lempengan Logam Berbentuk Segienam

Jika segienam tersebut, diperbesar diperoleh bentuk seperti pada Gambar 10. Dengan memanfaatkan hubungan a dan r, yaitu:

$$a^2 = r^2 + \frac{1}{4}a^2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}a^2 = r^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{4}{3}r^2 \Leftrightarrow a = 2r\sqrt{\frac{1}{3}},$$

maka diperoleh luas segienam pada Gambar 10 adalah $2r^2\sqrt{3}$. Misalkan A_l adalah luas lingkaran dan A_h adalah luas segienam, maka $A_l = \pi r^2$, $A_h = 2r^2\sqrt{3}$. Jika A_s adalah banyaknya sisa yang terbuang, maka

$$A_s = 2r^2\sqrt{3} - \pi r^2 = \left(2\sqrt{3} - \pi\right)r^2.$$



Gambar 10. Lingkaran yang termuat dalam Segienam

Dibandingkan dengan kasus I, dimana A_{s1} adalah sisa logam yang terbuang pada kasus 1 dan A_{s2} adalah banyaknya sisa logam yang terbuang pada kasus II diperoleh:

$$(4 - \pi)r^2 > \left(2\sqrt{3} - \pi\right)r^2 \rightarrow A_{s1} > A_{s2}.$$

Ini memperlihatkan bahwa sisa yang terbuang pada kasus I lebih banyak dibandingkan dengan sisa yang terbuang pada kasus II, dan ini membuat biaya pembuatan kaleng menjadi tidak ekonomis. Kembali ke kasus II 2, yaitu lingkaran yang dibuat dari segienam. Luas permukaan tabung = 2 A_{segienam} + $A_{\text{selimut tabung}}$

$$A = 4r^2\sqrt{3} + 2\pi rt$$

$$A(r) = 4r^2\sqrt{3} + 2\pi r\frac{V}{\pi r^2} = 4r^2\sqrt{3} + \frac{2V}{r}$$

Agar bahan logam yang digunakan minimum, kita dapat mencari bagaimana perbandingan antara tinggi (t) dan jari-jari (r) dengan menggunakan turunan.

$$A'(r) = 0 \Leftrightarrow 8r\sqrt{3} - \frac{2V}{r^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{8r^3\sqrt{3} - 2V}{r^2} = 0.$$

Diperoleh $\frac{t}{r} = \frac{4\sqrt{3}}{\pi}$. Dengan demikian, agar bahan yang digunakan minimum, maka perbandingan antara t dan r adalah $\boldsymbol{\frac{4\sqrt{3}}{\pi}}$. Nilai perbandingan antara t dan r yang didapat dari kasus I dan II merupakan salah satu alasan mengapa ukuran kaleng yang ada di supermarket tidak memenuhi $t = 2r$.

3.4. Relevansi ekonomi dan lingkungan serta kaitan dengan SDGs

Manfaat ekonomi paling langsung dari model ini adalah tersedianya parameter untuk memperkirakan kebutuhan bahan per unit. Jika pengurangan sisa dapat diwujudkan dalam proses nyata, perusahaan berpotensi menekan pembelian bahan baku dan biaya penanganan limbah. Efisiensi ruang pada kardus juga dapat berpengaruh pada penyimpanan dan pengiriman, meskipun efek tersebut belum dihitung dalam penelitian ini. Literatur kemasan berkelanjutan menegaskan pentingnya menilai fungsi kemasan, rantai pasok, dan dampak lingkungan secara terpadu (Geueke et al., 2018; Molina-Besch & Pålsson, 2016; Pauer et al., 2019).

Dari sisi lingkungan, pengurangan sisa logam berpotensi mengurangi kebutuhan bahan primer dan volume limbah produksi. Kaitan yang paling jelas adalah SDG 12, khususnya upaya penggunaan sumber daya secara efisien dan pengurangan limbah. Ada pula potensi kontribusi tidak langsung terhadap SDG 9 melalui perbaikan proses industri, dan SDG 13 apabila efisiensi material benar-benar menurunkan emisi sepanjang rantai pasok. Namun, hubungan dengan SDG 13 tidak dapat dikuantifikasi tanpa data energi, sumber bahan, tingkat daur ulang, dan emisi. Kerangka ekonomi sirkular juga menempatkan pencegahan limbah dan pemulihan material sebagai bagian dari perubahan sistem yang lebih luas, bukan sekadar perbaikan satu bentuk potongan (Kirchherr et al., 2017; Reike et al., 2018).

Untuk menerjemahkan temuan matematis menjadi rekomendasi industri, penelitian lanjutan perlu membandingkan desain pada volume dan fungsi kemasan yang setara, menjalankan simulasi nesting dua dimensi, memasukkan lebar potong dan toleransi, serta mengukur biaya bahan, energi, dan tingkat scrap. Penilaian siklus hidup dapat digunakan untuk memastikan bahwa pengurangan material pada satu tahap tidak menimbulkan beban lebih besar di tahap lain. Pendekatan semacam ini sejalan dengan literatur yang menempatkan desain kemasan sebagai keputusan lintas tahapan rantai nilai (Licciardello, 2017; Prakash & Pathak, 2017).

4. KESIMPULAN

Kajian ini menunjukkan bahwa optimasi geometri kemasan perlu membedakan antara luas permukaan produk dan luas bahan yang dialokasikan selama pemotongan. Untuk tabung tertutup dengan volume tetap dan tanpa sisa pemotongan, luas permukaan minimum terjadi ketika tinggi sama dengan diameter. Ketika tutup dan alas dipotong dari bidang persegi atau segi enam, rasio tinggi terhadap jari-jari optimum masing-masing menjadi $\frac{8}{\pi}$ dan $\frac{4\sqrt{3}}{\pi}$. Dalam model geometris ideal, pola segi enam menghasilkan sisa bahan sekitar 62,4% lebih rendah daripada pola persegi. Dimana secara terperinci setiap kasus yang dibahas bisa dinyatakan sebagai berikut:

1. Jika diameter kaleng adalah (d) maka susunan kaleng yang memuat lebih banyak adalah dengan alas segi enam beraturan dengan sisi $s = 2d3^{\frac{1}{4}}$ bisa membuat 19 kaleng.
2. Untuk tiga konfigurasi kardus yang memuat 18 kaleng, luas permukaan masing-masing adalah $L_1 = 36d^2 + 18dt$, $L_2 = 18d^2 + 24dt$, dan $L_3 = 12d^2 + 30dt$. Di antara ketiga konfigurasi tersebut, L_3 paling kecil jika $t < d$; L_2 paling kecil jika $d < t < 3d$; dan L_1 paling kecil jika $t > 3d$. Pada $t = d$, $L_2 = L_3$, sedangkan pada $t = 3d$, $L_1 = L_2$. Namun, Kesimpulan ini masih terbatas pada tiga pola yang dianalisis dan bukan pernyataan optimum global.
3. Berdasarkan hasil perhitungan secara matematis diperoleh ukuran kaleng dengan alas bidang persegi panjang yang ekonomis didapat jika semua sisi sama panjang.
4. Luas permukaan kaleng dengan alas berbentuk bidang lingkaran lebih minimum dari kaleng dengan alas berbentuk bidang persegi.
5. Salah satu cara yang efisien ditunjukkan seperti Gambar 9, karena sisa yang terbuang adalah untuk setiap lingkaran adalah $2r^2\sqrt{3} - \pi r^2 = \left(2\sqrt{3} - \pi\right)r^2$. Hal ini memberikan sisa yang lebih sedikit dibandingkan cara pada Gambar 8 memberikan sisa material terbuang untuk setiap lingkaran sebesar $4r^2 - \pi r^2 = (4 - \pi)r^2$.
6. Jika alas dan tutup kaleng dipotong seperti Gambar 8, supaya bahan yang digunakan minimum, maka perbandingan antara t dan r adalah 8 banding π atau $\frac{t}{r} = \frac{8}{\pi}$. Jika alas dan

tutup kaleng dipotong seperti Gambar 9, agar bahan yang digunakan minimum, maka perbandingan antara t dan r adalah $\frac{t}{r} = \frac{4\sqrt{3}}{\pi}$.

Secara praktis, hasil penelitian menyediakan dasar untuk menyusun uji desain yang mempertimbangkan biaya material dan pengurangan limbah, serta berpotensi mendukung SDG 12. Karena analisis ini bersifat matematis, penghematan biaya dan manfaat lingkungan masih harus divalidasi menggunakan data manufaktur dan penilaian siklus hidup.

.

5. DAFTAR PUSTAKA

Delorme, M., Iori, M., & Martello, S. (2017). Bin packing and cutting stock problems: Mathematical models and exact algorithms. European Journal of Operational Research, 255(1), 1–20. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.04.030

Geueke, B., Groh, K., & Muncke, J. (2018). Food packaging in the circular economy: Overview of chemical safety aspects for commonly used materials. Journal of Cleaner Production, 193, 491–505. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2018.05.005

International Organization for Standardization. (2006a). ISO 14040:2006 Environmental management—Life cycle assessment—Principles and framework. ISO.

International Organization for Standardization. (2006b). ISO 14044:2006 Environmental management—Life cycle assessment—Requirements and guidelines. ISO.

Kirchherr, J., Reike, D., & Hekkert, M. (2017). Conceptualizing the circular economy: An analysis of 114 definitions. Resources, Conservation and Recycling, 127, 221–232. DOI: https://doi.org/10.1016/j.resconrec.2017.09.005

Licciardello, F. (2017). Packaging, blessing in disguise. Review on its diverse contribution to food sustainability. Trends in Food Science & Technology, 65, 32–39. DOI: https://doi.org/10.1016/j.tifs.2017.05.003

Molina-Besch, K., & Pålsson, H. (2016). A supply chain perspective on green packaging development—Theory versus practice. Packaging Technology and Science, 29(1), 45–63. DOI: https://doi.org/10.1002/pts.2186

Pauer, E., Wohner, B., Heinrich, V., & Tacker, M. (2019). Assessing the environmental sustainability of food packaging: An extended life cycle assessment including packaging-related food losses and waste and circularity assessment. Sustainability, 11(3), 925. DOI: https://doi.org/10.3390/su11030925

Prakash, G., & Pathak, P. (2017). Intention to buy eco-friendly packaged products among young consumers of India: A study on developing nation. Journal of Cleaner Production, 141, 385–393. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2016.09.116

Reike, D., Vermeulen, W. J. V., & Witjes, S. (2018). The circular economy: New or refurbished as CE 3.0? Exploring controversies in the conceptualization of the circular economy through a focus on history and resource value retention options. Resources, Conservation and Recycling, 135, 246–264. DOI: 10.1016/j.resconrec.2017.08.027

Rundh, B. (2016). The role of packaging within marketing and value creation. British Food Journal, 118(10), 2491–2511. DOI: https://doi.org/10.1108/BFJ-10-2015-0390

Verghese, K., Lewis, H., Lockrey, S., & Williams, H. (2015). Packaging's role in minimizing food loss and waste across the supply chain. Packaging Technology and Science, 28(7), 603–620. DOI: https://doi.org /10.1002/pts.2127

Wohner, B., Pauer, E., Heinrich, V., & Tacker, M. (2019). Packaging-related food losses and waste: An overview of drivers and issues. Sustainability, 11(1), 264. DOI: https://doi.org/10.3390/su11010264