

SIMULASI SISTEM PERSAMAAN GELOMBANG AIR DANGKAL MENGUNAKAN METODE NUMERIS *LAX-FRIEDRICHS*

Suci Permata Hati*, Kartika Yulianti, Rini Marwati

Departemen Pendidikan Matematika FPMIPA UPI

*Surel: suciper03@gmail.com

ABSTRAK. Sistem persamaan gelombang air dangkal merupakan suatu sistem persamaan diferensial parsial hiperbolik yang menggambarkan keadaan gelombang dimana panjang gelombang jauh lebih panjang dibanding amplitudo, contohnya pada gelombang tsunami, gelombang air banjir, dan gelombang air tenang yang terkena gangguan. Metode volume hingga *Lax-Friedrichs* merupakan salah satu metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial hiperbolik. Penelitian ini bertujuan menerapkan metode volume hingga *Lax-Friedrichs* pada sistem persamaan gelombang air dangkal, untuk melihat bagaimana pengaruh topografi pada ketinggian dan kecepatan gelombang. Kasus yang disimulasikan pada penelitian ini yaitu pergerakan gelombang tsunami dan gelombang air tenang yang terkena gangguan. Hasil simulasi menunjukkan bahwa perbedaan topografi menyebabkan perbedaan perubahan pola ketinggian dan kecepatan gelombang.

Kata Kunci: Gelombang Air Dangkal, Metode *Lax-Friedrichs*, topografi, Gelombang Tsunami, Gelombang Air Tenang.

SIMULATION OF SHALLOW WATER EQUATIONS USING LAX-FREDRICH'S METHOD

ABSTRACT. The shallow water equations are a system of hyperbolic partial differential equations that describe wave conditions where wavelengths are longer than amplitude, for example tsunami waves, flood water waves, and waves of rest water affected by interference. The finite volume method Lax-Friedrichs is one of the numerical methods for solving hyperbolic partial differential equations. The aim of this research is to apply the Lax-Friedrichs method to solve the shallow water equations, in order to simulate how the topography influences the altitude and velocity of the waves. The simulated cases in this study are the movement of tsunami waves and waves of rest water affected by interference. The simulation results show that the differences in topography lead to differences in changes altitude and velocity of the waves.

Key words: Shallow Water Equations, Lax-Friedrichs Method, topography, Tsunami Waves, Waves of Rest Water.

1. PENDAHULUAN

Banyak permasalahan yang dapat dipresentasikan ke dalam model matematika. Sebagian permasalahan dimodelkan ke dalam model matematika menggunakan persamaan diferensial, salah satunya memodelkan perambatan gelombang yang dinamakan persamaan gelombang. Gelombang air dimodelkan dari pergerakan yang dialami gelombang tersebut. Dalam kasus-kasus gelombang air yang dapat dimodelkan salah satunya yaitu gelombang air dangkal.

Gelombang air dangkal adalah gelombang ketika panjang gelombang air jauh lebih panjang dibandingkan dengan amplitudo [1]. Beberapa contoh gelombang air dangkal yaitu gelombang pada permukaan air tenang yang terkena gangguan, gelombang air pada permukaan waduk, gelombang tsunami, dan penyebaran banjir. Ketinggian dan kecepatan gelombang permukaan air dalam persoalan gelombang air dangkal dapat dimodelkan menjadi persamaan gelombang air dangkal.

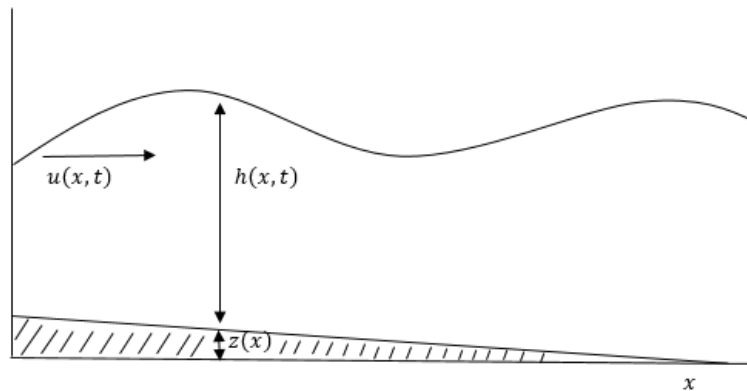
Pada umumnya, karakteristik gelombang tsunami memiliki panjang gelombang jauh lebih besar jika dibandingkan dengan kedalaman laut yang dilaluinya [2]. Kondisi topografi dasar laut semakin mendekati pantai semakin tinggi jika dibandingkan dengan dasar laut yang jauh dari pantai. Hal ini mungkin penyebab perbedaan antara ketinggian gelombang tsunami di daerah laut lepas pantai dan di daerah pantai. Selain di laut, kondisi topografi tidak datar untuk perambatan gelombang air dangkal juga dapat dilihat pada dasar suatu kolam atau waduk yang mana permukaan airnya cenderung tenang lalu terkena gangguan.

Metode *Lax-Friedrichs* dinamai berdasarkan nama penemunya, yaitu Peter Lax dan Kurt O. Friedrichs [3]. Metode ini merupakan salah satu metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial hiperbolik. Sari [1] menggunakan metode volume hingga *Lax-Friedrichs* dan metode beda hingga grid kolokasi dalam menyelesaikan persamaan gelombang air dangkal. Dalam penelitiannya metode volume hingga *Lax-Friedrichs* menghasilkan solusi sistem yang lebih baik dibandingkan metode beda hingga grid kolokasi. Saiduzzaman dan Ray [4] membandingkan metode *Lax-Friedrichs*, metode *LaxWendroff*, dan metode *Leap-Frog*, kemudian mensimulasikan persamaan gelombang air dangkal dengan topografi datar. Benkhaldoun, and Seaïd [5] memodifikasi metode volume hingga yang memuat tahapan *predictor* dan tahapan *corrector* untuk menyelesaikan persamaan gelombang air dangkal dengan topografi datar dan tidak datar. Gunawan [6] menyelesaikan secara numerik persamaan gelombang air dangkal untuk topografi yang tidak rata, menggunakan metode volume hingga *explicit staggered*.

Dalam penelitian ini, metode volume hingga *Lax-Friedrichs* digunakan untuk mensimulasikan persamaan gelombang air dangkal, dengan tujuan untuk melihat pengaruh topografi terhadap pergerakan gelombang tsunami dan pergerakan gelombang air tenang yang terkena gangguan.

Persamaan Gelombang Air Dangkal

Persamaan gelombang air dangkal termasuk persamaan diferensial parsial hiperbolik nonlinear [2]. Dalam model ini digunakan variabel-variabel berikut: $h(x, t)$ merupakan ketinggian air dihitung dari permukaan dasar topografi pada titik x di waktu t , $u(x, t)$ merupakan kecepatan air pada arah horizontal di titik x dan waktu t , dan $z(x)$ adalah notasi topografi tanah pada titik x . Jika topografi datar maka dituliskan $z(x) = 0$. Ilustrasi terdapat pada Gambar 1.



Gambar 1. Ilustrasi Keadaan Fluida untuks Konteks Satu Dimensi

Dalam model persamaan gelombang air dangkal ini, kecepatan vertikal fluida diabaikan dan diasumsikan bahwa fluida tidak dapat dimampatkan, serta diasumsikan pula perambatan gelombang di permukaan tidak dipengaruhi oleh angin. Dalam penelitian ini dibahas sistem persamaan gelombang air dangkal satu dimensi, yaitu

$$h_t + (uh)_x = 0 \quad (1)$$

$$(hu)_t + \left(hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right)_x = -ghz_x, \quad (2)$$

dengan g adalah konstanta gravitasi.

Persamaan (1) mendeskripsikan hukum kekekalan massa sedangkan persamaan (2) mendeskripsikan hukum kekekalan momentum. Sistem persamaan gelombang air dangkal (1) dan (2) diselesaikan secara numerik untuk mensimulasikan pergerakan gelombang untuk kasus permukaan air tenang yang terkena tetesan air dan pergerakan gelombang tsunami. Untuk kasus gelombang

air tenang yang terkena gangguan pada suatu kolam, digunakan interval $x = [-5, 5]$, nilai awal kecepatan dan ketinggian saat $t = 0$ yaitu:

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= 0 \\ h(x, 0) &= 0,75 \exp(-1,5x^2) + 1 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

dengan syarat batas:

$$\left. \begin{aligned} u(\pm 5, t) &= 0 \\ h_x(\pm 5, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Syarat batas $u(\pm 5, t) = 0$ menggambarkan bahwa pada dinding kolam kecepatan gelombang adalah nol, dan $h_x(\pm 5, t) = 0$ menggambarkan bahwa pada dinding kolam permukaan gelombang selalu datar.

Untuk kasus penyebaran gelombang tsunami, digunakan interval $x = [0, 10]$, nilai awal kecepatan dan ketinggian saat $t = 0$ yaitu

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= 1 \\ h(x, 0) &= \exp(-(x - 2,5)^2) + 1 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

dengan syarat batas:

$$\left. \begin{aligned} u_x(0, t) &= 0 \text{ dan } u_x(10, t) = 0 \\ h_x(0, t) &= 0 \text{ dan } h_x(10, t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Syarat batas $u_x(0, t) = 0$ dan $u_x(10, t) = 0$ menggambarkan bahwa keadaan pada ujung-ujung interval daerah $x = [0, 10]$ kecepatan gelombang adalah konstan, serta $h_x(0, t) = 0$ dan $h_x(10, t) = 0$ menggambarkan bahwa permukaan gelombang pada ujung-ujung interval daerah adalah datar. Selanjutnya, untuk penyelesaian sistem persamaan ini digunakan metode *Lax-Friedrichs*.

2. METODE LAX-FRIEDRICHS

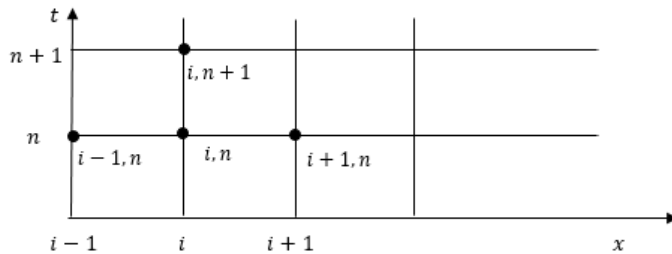
Metode volume hingga menggunakan aproksimasi interval domainnya, yaitu $\Delta x = x_{i-1} - x_i$ atau $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ untuk jarak aproksimasi dalam interval x dan $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ untuk jarak aproksimasi dalam interval waktu [3]. Persamaan (7) dan persamaan (8) merupakan skema penyelesaian sistem persamaan gelombang air dangkal dengan metode volume hingga *Lax-Friedrichs*.

$$h_i^{n+1} = \frac{1}{2}(h_{i-1}^n + h_{i+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [u_{i+1}^n h_{i+1}^n - u_{i-1}^n h_{i-1}^n] \quad (7)$$

dan

$$\begin{aligned} h_i^{n+1} u_i^{n+1} &= \frac{1}{2}(h_{i-1}^n u_{i-1}^n + h_{i+1}^n u_{i+1}^n) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[h_{i+1}^n (u^2)_{i+1}^n + \frac{1}{2} g (h^2)_{i+1}^n - h_{i-1}^n (u^2)_{i-1}^n \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} g (h^2)_{i-1}^n + g h (z_{x+1}^n - z_{x-1}^n) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Dalam menghitung penyelesaian sistem (1) dan (2) untuk (h_i^{n+1}) dan (u_i^{n+1}) dibutuhkan tiga nilai ketinggian gelombang pada waktu sebelumnya yaitu $(h_{i-1}^n, h_i^n, h_{i+1}^n)$ dan dibutuhkan dua nilai kecepatan gelombang sebelumnya yaitu (u_{i-1}^n, u_{i+1}^n) . Ilustrasi pembaharuan nilai (h_i^{n+1}) dan (u_i^{n+1}) terdapat pada Gambar 2.



Gambar 2. Ilustrasi Pembaharuan Nilai Kecepatan dan Ketinggian Gelombang

Syarat batas pada $x = 0$ adalah $u_x(0, t) = 0$. Berdasarkan metode beda hingga, diperoleh $\frac{u_1^t - u_{-1}^t}{2\Delta x} = 0$, maka didapat $u_1^t - u_{-1}^t = 0$ atau $u_1^t = u_{-1}^t$. Syarat batas pada $x = L$ adalah $u_x(L, t) = 0$. Berdasarkan metode beda hingga, diperoleh $\frac{u_{N+1}^t - u_{N-1}^t}{2\Delta x} = 0$, maka didapat $u_{N+1}^t - u_{N-1}^t = 0$ atau $u_{N+1}^t = u_{N-1}^t$. Sehingga untuk seluruh syarat batas diperoleh

$$\begin{aligned} u_1^t &= u_{-1}^t & u_{N+1}^t &= u_{N-1}^t \\ h_1^t &= h_{-1}^t & h_{N+1}^t &= h_{N-1}^t, \end{aligned}$$

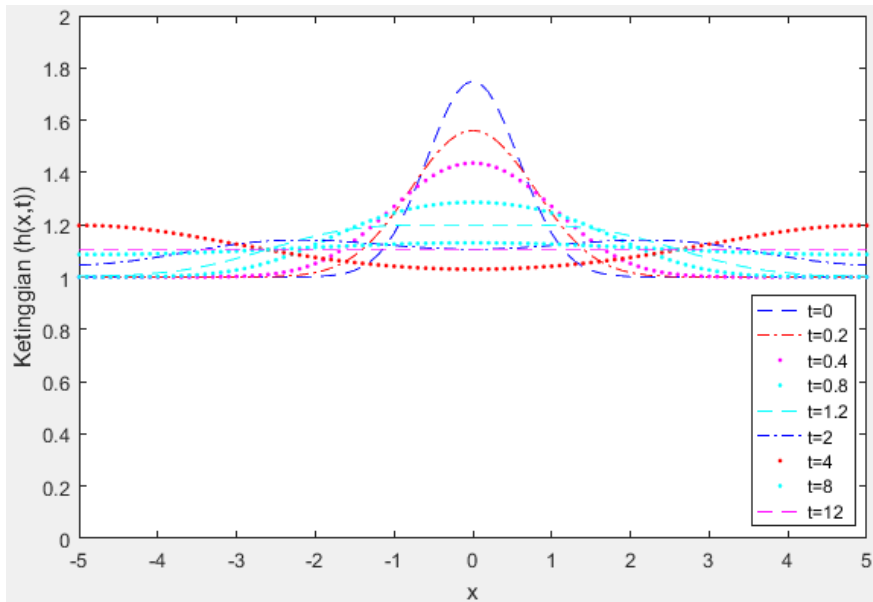
dengan N merupakan total diskritisasi yang dihasilkan.

3. SIMULASI DAN PEMBAHASAN

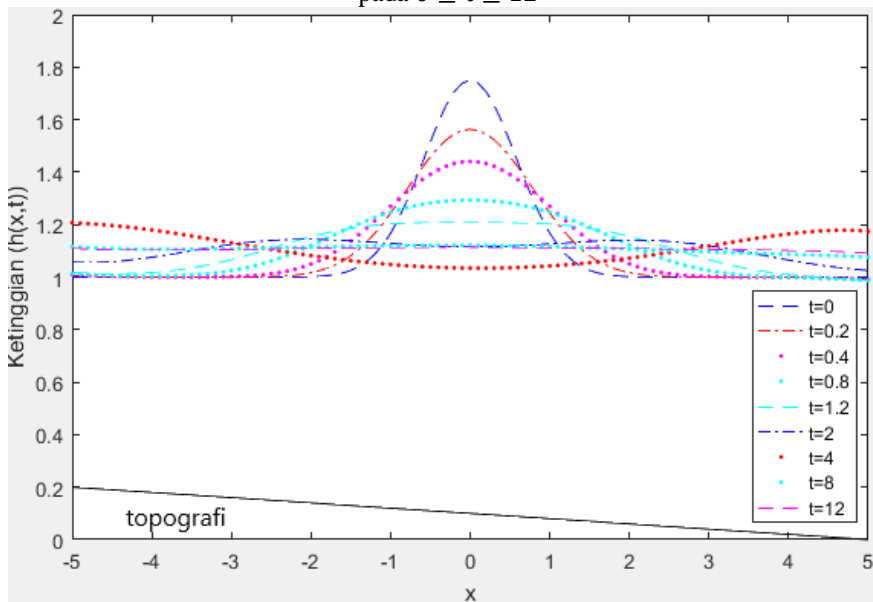
Dalam penelitian ini, skema penyelesaian (7) dan (8) dihitung menggunakan bantuan *software* MATLAB. Digunakan nilai jarak aproksimasi $\Delta t = 0,01$ dan $\Delta x = 0,1$.

3.1 Air Tenang yang Terkena Gangguan

Pada simulasi kasus air tenang yang terkena gangguan, program dijalankan dari $t = 0$ sampai $t = 12$. Topografi $z(x)$ pada topografi datar yaitu nol dan topografi tidak datar yaitu $z(x) = -0,02(x - 5)$.



Gambar 3. Grafik Perubahan Ketinggian Gelombang Kasus Topografi Datar pada $0 \leq t \leq 12$

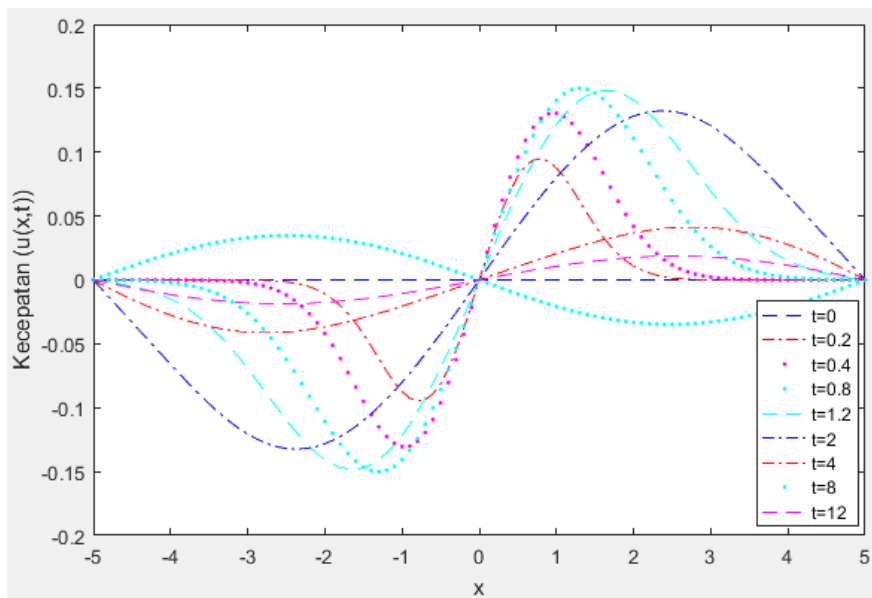


Gambar 4. Grafik Perubahan Ketinggian Gelombang Kasus Topografi Tidak Datar pada $0 \leq t \leq 12$

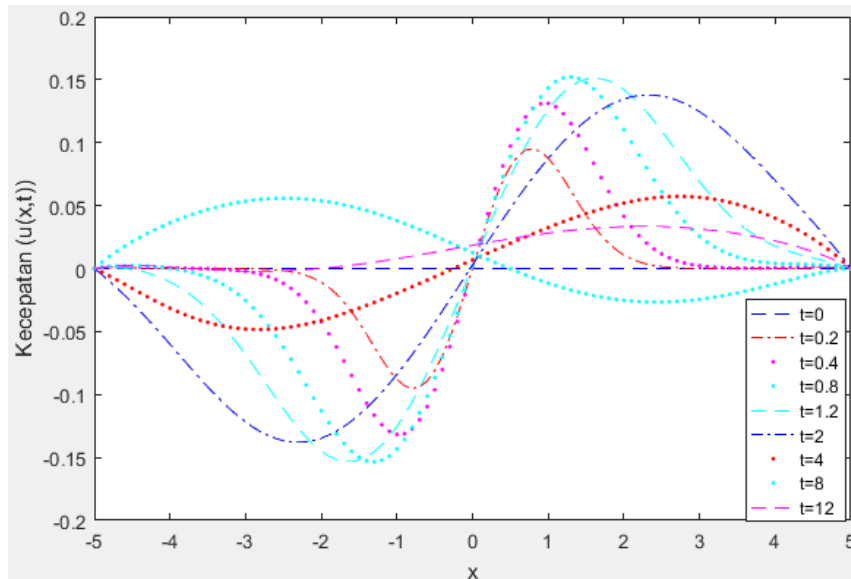
Berdasarkan Gambar 3 dan Gambar 4 dapat dilihat bahwa amplitudo gelombang mengecil dan gelombang beresilasi pada dua arah. Untuk topografi datar, gelombang beresilasi secara simetris terhadap $x = 0$, sedangkan untuk topografi tidak datar gelombang beresilasi secara tidak simetris terhadap $x = 0$.

Hal ini diakibatkan oleh perbedaan ketinggian awal $h(x, 0)$ pada masing-masing kasus. Pada kasus topografi datar, ketinggian awal $h(x, 0)$ simetri terhadap $x = 0$, sehingga ketinggian dan kecepatan gelombangnya pun simetri terhadap $x = 0$. Hal yang sama dengan kasus topografi tidak datar, dikarenakan pada kasus ini ketinggian awal $h(x, 0)$ tidak simetri terhadap $x = 0$ maka ketinggian dan kecepatan gelombangnya pun tidak simetri terhadap $x = 0$. Dapat disimpulkan, perbedaan topografi mempengaruhi pergerakan gelombang yang dihasilkan.

Selanjutnya, pada $t = 12$ untuk kedua kasus topografi dapat dikatakan sudah tidak ada gelombang atau ketinggian permukaan air hampir rata pada ketinggian $h(x) \approx 1,1$ untuk topografi datar dan $h(x) + z(x) \approx 1,1$ untuk topografi tidak datar.



Gambar 5. Grafik Perubahan Kecepatan Gelombang Kasus Topografi Datar pada $0 \leq t \leq 12$



Gambar 6. Grafik Kecepatan Gelombang Kasus Topografi Tidak Datar pada $0 \leq t \leq 12$

Berdasarkan Gambar 5 dan Gambar 6, dapat dilihat bahwa pada kasus topografi datar dari $t = 0$ sampai $t = 4$ untuk $x > 0$ kecepatan gelombang bernilai positif, yang artinya gelombang bergerak ke arah kanan. Untuk $x < 0$ kecepatan gelombang bernilai negatif, yang artinya gelombang bergerak ke arah kiri. Kecuali pada $x = 5$ dan $x = -5$, kecepatan bernilai nol, yang artinya pada dinding kolam kecepatan gelombang adalah nol (sesuai dengan syarat batas (4)). Untuk kasus topografi tidak datar, dari $t = 0$ sampai $t = 4$ untuk $x > 0$ kecepatan gelombang bernilai positif artinya gelombang bergerak ke arah kanan, namun untuk $x < 0$ kecepatan gelombang tidak seluruhnya bernilai negatif. Akan tetapi pada $-5 < x < -4$ terdapat kecepatan yang bernilai positif artinya gelombang tidak seluruhnya bergerak ke arah kiri. Dapat disimpulkan, untuk topografi datar kecepatan gelombang bersifat simetris terhadap $x = 0$, sedangkan untuk topografi tidak datar kecepatan gelombang bersifat tidak simetris terhadap $x = 0$. Pada $t = 6$ walaupun untuk topografi tidak datar kecepatan gelombang tidak simetris terhadap $x = 0$, untuk kedua kasus topografi, kecepatan gelombang untuk $x > 0$ bernilai negatif dan untuk $x < 0$ kecepatan gelombang bernilai positif. Hal tersebut menandakan gelombang bergerak berbalik arah dibandingkan dengan $t = 4$. Hal ini diakibatkan gelombang telah mencapai dinding kolam sehingga gelombang berbalik arah. Dapat dilihat pula untuk kedua kasus bahwa kecepatan gelombang semakin melambat untuk setiap waktunya dan perlahan mendekati nol. Kedua gelombang dari masing-masing dinding akhirnya akan bertemu dan

menyebar kembali terus seperti itu sampai akhirnya gelombang menghilang atau permukaan menjadi datar kembali.

Berdasarkan Gambar 3 sampai Gambar 6 keadaan *steady state* yang diperoleh pada kedua kasus topografi adalah sama. Kecepatan gelombang semakin melambat untuk setiap waktunya dan perlahan mendekati nol. Pada $t = 12$, kecepatan gelombang mendekati nilai nol, dan ketinggian permukaan air hampir rata pada angka 1,1 dengan catatan ketinggian pada kasus topografi tidak datar ditambahkan dengan topografi. Hal ini sesuai dengan fenomena di kehidupan nyata, bahwa riak air pada air tenang yang terkena gangguan akan kembali tenang.

Hasil dari simulasi yang dilakukan oleh program MATLAB divalidasi dengan cara membandingkannya dengan solusi analitik pada keadaan *steady state* (keadaan tunak atau keadaan setimbang). Solusi *steady state* untuk kasus air tenang yang terkena gangguan, untuk topografi datar yaitu

$$\begin{aligned}u(x) &= 0 \\h(x) &= 1,1085.\end{aligned}$$

Berdasarkan hasil simulasi yang dituangkan pada Gambar 3 dan Gambar 5, solusi numerik pada $t = 12$ adalah $u(x, 12) \approx 0$ dan $h(x, 12) \approx 1,1$. Solusi analitik *steady state* untuk topografi tidak datar yaitu

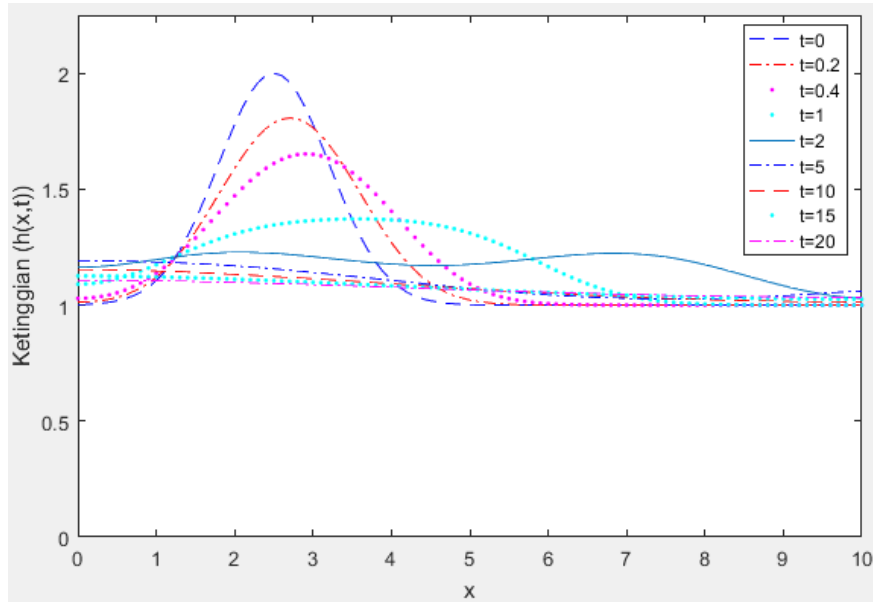
$$\begin{aligned}u(x) &= 0 \\h(x) &= -0,02x + 1,0085.\end{aligned}$$

Berdasarkan solusi analitik *steady state* tersebut, pada $x = 0$ diperoleh $h(0) = 1,0085$. Selanjutnya, berdasarkan hasil simulasi pada Gambar 8, pada $t = 10$ dimana gelombang sudah dapat dikatakan tidak ada, diperoleh $h(x, 10) + z(x) \approx 1,1$. Dikarenakan $z(0) = 0,1$, maka diperoleh $h(0, 10) \approx 1,1 - 0,1 = 1$. Dikarenakan terdapat kesesuaian antara solusi analitik *steady state* dengan solusi numeris, maka dapat disimpulkan solusi numeris yang dilakukan oleh program sudah benar.

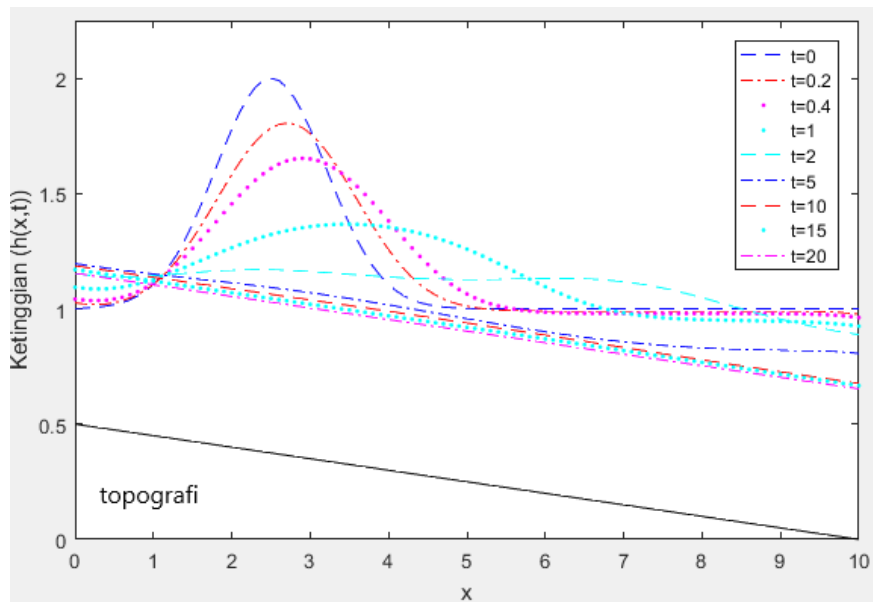
3.2 Penyebaran Gelombang Tsunami

Pada simulasi kasus penyebaran tsunami, digunakan syarat batas dan nilai awal pada persamaan (5) dan persamaan (6) serta diambil $\Delta t = 0,01$ dan $\Delta x = 0,1$ dengan domain $x = [0, 10]$.

Pada simulasi kasus ini, program dijalankan sampai $t = 20$. Topografi $z(x)$ pada topografi datar yaitu nol dan topografi tidak datar yaitu $z(x) = -0,05(x - 10)$.



Gambar 7. Grafik Perubahan Ketinggian Gelombang untuk Kasus Topografi Datar pada $0 \leq t \leq 20$



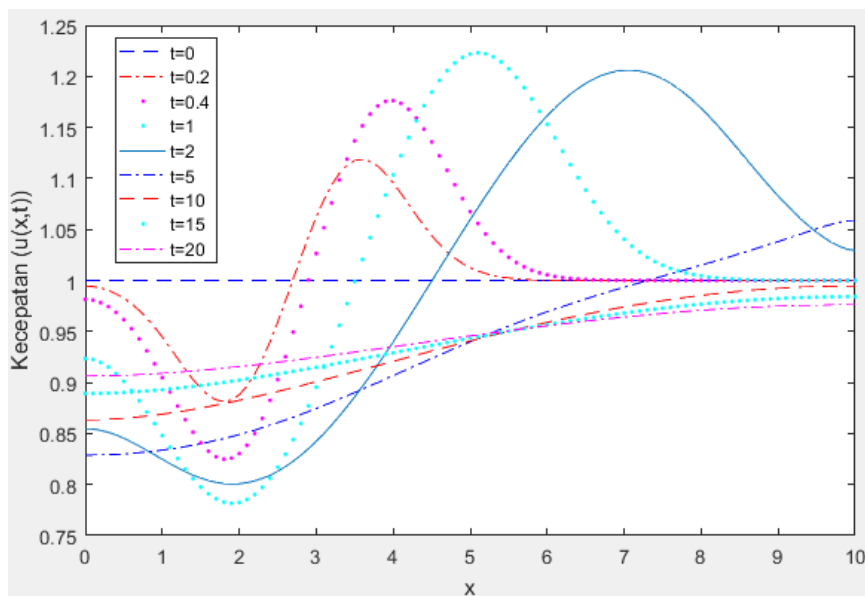
Gambar 8. Grafik Perubahan Ketinggian Gelombang untuk Kasus Topografi Miring pada $0 \leq t \leq 20$

Berdasarkan Gambar 7 dan Gambar 8, pada $t = 0$ pada $0 < x < 5$ terdapat gelombang awal. Dapat dilihat gelombang awal bergerak ke arah kanan karena nilai kecepatan awal yang digunakan adalah satu. Bagian kanan gelombang awal

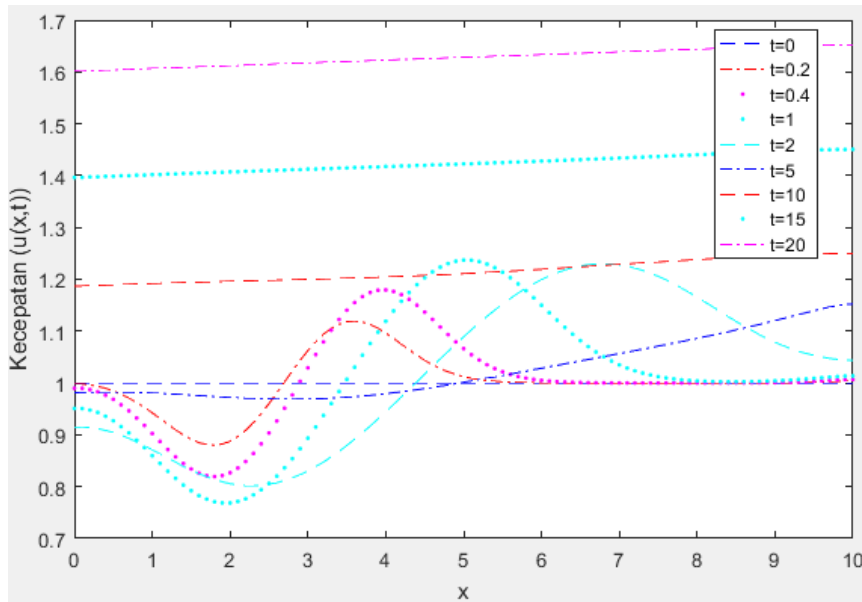
bergerak lebih cepat dibandingkan bagian kiri gelombang awal. Untuk kasus topografi datar, pada $t = 0$ sampai $t = 1$ dapat dilihat bahwa pada interval $8 < x \leq 10$ ketinggian air masih rata atau gelombang belum sampai. Sedangkan, untuk kasus topografi tidak datar, pada $t = 0$ sampai $t = 1$ dapat dilihat bahwa pada interval $8 < x \leq 10$ ketinggian sudah tidak rata. Pada $t = 2$ baru terlihat bahwa gelombang telah sampai ke interval $8 < x \leq 10$ untuk kedua kasus, namun dapat dilihat gelombang yang dihasilkan untuk kedua kasus berbeda.

Berdasarkan Gambar 7 dan Gambar 8, dapat dilihat pula bahwa keseluruhan gelombang menyebar perlahan ke arah kanan pada selang waktu $0 \leq t \leq 20$. Selanjutnya, permukaan gelombang perlahan kembali tenang atau tidak ada gelombang dan permukaan air perlahan menjadi rata. Dengan catatan untuk kasus topografi tidak datar keadaan permukaan gelombang miring.

Berdasarkan perbandingan Gambar 7 dan Gambar 8, dapat dilihat bahwa pergerakan gelombang yang dihasilkan untuk kedua kasus berbeda. Pada kasus topografi tidak datar, pergerakan gelombang awal lebih cepat dibandingkan dengan kasus topografi datar dikarenakan pengaruh gravitasi yang diberikan oleh topografi.



Gambar 9. Grafik Perubahan Kecepatan Gelombang untuk Kasus Topografi Tidak Datar pada $0 \leq t \leq 20$



Gambar 10. Grafik Perubahan Kecepatan Gelombang untuk Kasus Topografi Tidak Datar pada $0 \leq t \leq 20$

Berdasarkan Gambar 9 dan Gambar 10 untuk kedua kasus topografi perubahan kecepatan yang bernilai lebih dari satu dialami bagian kanan gelombang awal. Namun, untuk kedua kasus topografi dapat dilihat bahwa kecepatan gelombang pada $8 < x \leq 10$ pada $0 < t \leq 1$ tidak sama. Pada $t > 1$ dapat dilihat bahwa perubahan kecepatan yang dihasilkan untuk keseluruhan interval tidak sama. Berdasarkan Gambar 9, kecepatan gelombang mengecil dengan perubahan kecepatan semakin mengecil pula, kemudian pada $t = 20$ kecepatan gelombang berada pada kisaran 1,03 sampai 1,11. Pada Gambar 10 dapat dilihat kecepatan gelombang membesar dengan perubahan kecepatan semakin mengecil dan pada $t = 20$ kecepatan gelombang berada pada kisaran 1,6 sampai 1,65

Sebagai validasi, simulasi kasus penyebaran gelombang tsunami dilakukan menggunakan program yang sama dengan kasus gelombang air tenang yang terkena gangguan, sehingga diasumsikan bahwa hasil simulasi yang diberikan oleh program pada kasus ini sudah benar.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil simulasi dapat disimpulkan bahwa topografi mempengaruhi ketinggian dan kecepatan gelombang yang dihasilkan. Pada kasus gelombang air tenang yang terkena gangguan, jika topografi datar maka pergerakan gelombang simetris terhadap $x = 0$ sedangkan jika topografi tidak datar (miring) maka

pergerakan gelombang tidak simetris terhadap $x = 0$. Selain itu, kecepatan gelombang untuk kedua kasus topografi semakin melambat untuk setiap waktunya dan perlahan mendekati nol. Perubahan ketinggian untuk kedua kasus topografi juga semakin mengecil, yang akhirnya permukaan air akan rata.

Pada kasus penyebaran gelombang tsunami dengan topografi datar, perubahan ketinggian dan kecepatan gelombang hanya dipengaruhi oleh gelombang awal. Untuk kasus topografi tidak datar, perubahan ketinggian dan kecepatan dipengaruhi pula oleh gravitasi yang merupakan dampak dari perbedaan topografi sehingga amplitudo gelombang mengecil lebih cepat pada daerah yang lebih dalam. Selain itu, pada kedua kasus ketinggian perlahan berubah hingga akhirnya ketinggian hampir rata, dengan catatan pada kasus topografi tidak datar ketinggian gelombang dihitung tanpa topografi serta didapat perubahan kecepatan pada kasus kedua kasus semakin mengecil. Namun, pada topografi datar nilai kecepatan gelombang mengecil sedangkan pada topografi datar kecepatan gelombang membesar.

6. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Sari, Ilga P. (2016). Penyelesaian Persamaan Gelombang Air Dangkal Dengan Beberapa Metode Numeris. (Skripsi). Program Studi Matematika, Universitas Sanata Dharma Yogyakarta: tidak diterbitkan.
- [2] Jamhuri, M. (2014). Simulasi Perambatan menggunakan Persamaan Gelombang Air-Dangkal. (Laporan Penelitian). Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negeri (UIN) Maliki Malang, Malang.
- [3] LeVeque, R. J. (2004). *Finite-Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [4] Saiduzzaman, M. & Ray, S. K. (2013). *Comparison of Numerical Schemes for Shallow Water Equation*. Global Journal of Science Frontier Research. Vol. 13.
- [5] Benkhaldoun, F., dan Saïd, M. (2010). *A simple finite volume method for the shallow water equations*. Journal of Computational and Applied Mathematics. Vol. 234, hlm. 58–72.
- [6] Gunawan, P. H. (2015). *Numerical Simulation of Shallow Water Equations and Related Models*. (Disertasi). General Mathematics [math.GM]. Université Paris-Est: tidak diterbitkan.