RING ABELIAN DAN MODUL ABELIAN

Oleh:

Andri Novianto [(1)]

Elah Nurlaelah [(2)]

Ririn Sispiyati [(2)]

ABSTRAK

Dalam tulisan ini akan diperkenalkan modul abelian sebagai perluasan dari ring abelian. Misalkan R suatu ring dengan elemen kesatuan. Suatu ring R disebut abelian jika setiap elemen idempoten di R merupakan central yaitu, berlaku $ae = ea$, untuk $a \in R$, dan idempotent $e \in R$. M suatu R-modul disebut abelian jika untuk suatu $m \in M$ dan $a \in R$, suatu $e \in R$, berlaku $aem = eam$. Dapat dibuktikan bahwa setiap ring tereduksi, setiap ring semikomutatif, setiap ring armendariz, setiap ring armendariz deret pangkat, dan ring simetrik merupakn ring abelian. Begitu juga untuk setiap modul tereduksi, setiap modul semikomutatif, setiap modul armendariz, setiap modul armendariz deret pangkat, dan setiap modul simetrik merupakan modul abelian.

Kata kunci: ring, modul, abelian, tereduksi, semikomutatif, armendariz, armendariz deret pangkat, simetrik, pp-modul.

1. PENDAHULUAN

Dalam artikel ini R menotasikan suatu ring dengan elemen kesatuan 1 dan modul dengan elemen kesatuan M R-modul. Dalam jounal yang dipaparkan Agayev, N. *et al*, .(2009) yang berjudul abelian modul terdapat definisi-defini yang berkaitan dengan ring abelian dan modul abelian. Suatu ring R disebut tereduksi, jika ring tersebut tidat memiliki elemen nilpotent taknol. Suatu modul M disebut tereduksi, jika untuk suatu $m \in M$ dan $a \in R$, $am = 0$ maka $Rm \cap aM = 0$. Misalkan suatu idempotent $e \in R$, M disebut p.p-modul jika untuk suatu $m \in M$, $l_R(m) = Re$ dimana $l_R(m)$ suatu annihilator kiri dari suatu elemen $m \in M$.

Diberikan suatu ring R, didefinisikan polinom perluasan atas R sebagai berikut:

$$R[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{s} a_i x^i \ , s \geq 0, a_i \in R \right\}$$

Dan polinom deret pangkat perluasan atas R sebagai berikut

$$R[[x]] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \ , a_i \in R \right\}$$

Suatu modul M didefinisikan polinom perluasan atas M sebagai berikut

$$M[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{s} m_i x^i \ , s \geq 0, m_i \in M \right\}$$

Dan polinom deret pangkat perluasan atas M sebagai berikut

$$M[[x]] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} m_i x^i \ , m_i \in M \right\}$$

Suatu ring R disebut armendariz jika untuk suatu $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \in R[x]$ dan $g(x) = \sum_{j=0}^{s} b_j x^j , \in R[x]$, $a_i, b_j \in R$ dengan $f(x)g(x) = 0$ maka $a_i b_j = 0, \forall\, i, j$. Suatu ring R disebut armendariz deret pangkat jika untuk suatu $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \in R[[x]]$ dan $g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j , \in R[[x]]$, $f(x)g(x) = 0$ maka $a_i b_j = 0, \forall\, i, j$.

Suatu modul M disebut armendariz jika untuk suatu $m(x) = \sum_{i=1}^{n} m_i x^i \in M[x]$ dan $f(x) = \sum_{j=0}^{s} a_j x^j , \in R[x]$, $f(x)m(x) = 0$ maka $a_j m_i = 0, \forall\, i, j$. Suatu modul M disebut armendariz deret pangkat jika untuk suatu $m(x) = \sum_{i=1}^{\infty} m_i x^i \in M[[x]]$ dan $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x^j , \in R[[x]]$, $f(x)\, m(x) = 0$ maka $a_j m_i = 0, \forall\, i, j$.

Suatu ring R disebut semikomutatif jika untuk setiap $a \in R,\ l_R(a)$ adalah ideal di R. Dengan kata lain, untuk sembarang $a, b \in R,\ ba = 0$ maka $bRa = 0$. Suatu modul M disebut semikomutatif jika untuk setiap $m \in M, l_R(m)$ adalah suatu ideal dari R. Dengan kata lain, untuk suatu $m \in M,\ a \in R,\ am = 0$ mengakibatkan $aRm = 0$

Suatu ring R disebut simetrik, jika $abc = 0$ akibatnya $bac = 0$, untuk suatu $a, b, c \in R$. Suatu modul M disebut simetrik, jika $abm = 0$ akibatnya $bam = 0$, untuk suatu $m \in M$ dan $a, b \in R$.

2. PEMBAHASAN

Dalam ring terdapat perluasan pembahasan yaitu mengenai ring abelian. Secara eksplisit ring abelian didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.1
Suatu ring R disebut abelian jika semua elemen idempoten di R adalah *central*, yaitu berlaku $ae = ea$ untuk setiap $a \in R$ dan idempoten $e \in R$.

Contoh 2.2

1. Himpunan bilangan bulat Z adalah ring abelian, karena semua idempoten di Z yaitu 0 dan 1 berlaku $ae = ea, \forall a \in Z$. Ambil sembarang $x \in Z$ perhatikan bahwa,
untuk $e = 0$
$$x0 = 0 = 0x$$
untuk $e = 1$
$$x1 = x = 1x$$

2. Himpunan matrik atas R yang berukuran 2×2 atau biasa dinotasikan $M_2(R) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b. c. d \in R\right\}$ adalah bukan ring abelian.
Misalkan $M_2(R)$ adalah suatu ring, ambil $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(R)$ karena $e^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e \in M_2(R)$, artinya e suatu idempoten di $M_2(R)$. Ambil sembarang $a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(R)$, perhatikan bahwa
$$ae = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$ea = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

artinya bahwa $ae \neq ea$, $a \in M_2(R)$. Oleh karena itu $M_2(R)$ bukan ring abelian

Lemma- lemma dibawah ini menunjukkan bahwa setiap ring semikomutatif, setiap ring tereduksi, setiap ring armendariz, setiap ring armendariz deret pangkat, dan setiap ring simetrik merupakan ring abelian dan menunjukkan terdapat hubugan antara antara ring abelian dengan ring semikomutatif, ring tereduksi, ring armendariz, ring armendariz deret pangkat, dan ring simetrik.

Lemma 2.3

1. Jika ring R adalah ring semikomutatif maka R merupakan ring abelian.
2. Jika ring R merupakan ring abelian dan p.p-ring maka R suatu ring semikomutatif.

Lemma 2.4

1. Jika ring R merupakan ring tereduksi maka R merupakan ring abelian.
2. Jika ring R merupakan p.p-ring dan ring abelian maka R adalah ring tereduksi.

Lemma 2.5

1. Jika R merupakan ring armendariz maka R adalah ring abelian.
2. Jika R adalah $p.p.$-ring dan ring abelian maka R adalah ring armendariz.

Akibat 2.6

1. Jika R adalah ring armendariz deret pangkat maka R adalah ring abelian.
2. Jika R adalah $p.p.$-ring dan ring abelian maka R adalah ring armendariz deret pangkat.

Lemma 2.7

1. Jika ring R merupakan ring simetrik maka R merupakan ring abelian.
2. Jika R merupakan p.p-ring dan ring abelian maka R adalah ring simetrik.

Teorema 2.8

Misalkan suatu ring R merupakan p.p-ring. Maka pernyataan berikut ekuivalen:

1. R adalah ring tereduksi
2. R adalah ring simetrik
3. R adalah ring semikomutatif
4. R adalah ring armendariz
5. R adalah ring armendariz deret pangkat

6. R adalah ring abelian

Bukti:

$1 \Longrightarrow 2$

Misalkan R merupakan ring tereduksi dan p.p-ring. Ambil sembarang $a, b, c \in R$ dengan $abc = 0$, karena R suatu p.p-ring maka $a \in l_R(bc) = Re$, untuk suatu idempoten $e \in R$ mengakibatkan $ebc = 0$ dan $a = ae$. Karena R ring tereduksi tidak sulit untuk menunjukkan bahwa R merupakan ring semikomutatif, sehingga didapat $ebRc = 0$. Untuk $a \in R$ perhatikan bahwa,

$ebRc = ebac$

$= baec$ Karena R abelian

$= bac$ Karena $ae = a$

$= 0$

Oleh karena $bac = 0$, maka R merupakan ring simetrik.

$2 \Longrightarrow 3$

Misalkan R adalah ring simetrik dan p.p-ring. Ambil sembarang $a, b \in R$ dengan $ba = 0$. Karena R adalah p.p-ring maka $b \in l_R(a) = Re$ untuk suatu idempoten $e \in R$ yang mengakibatkan $ea = 0$ dan $b = be$, ini berarti $Rea = 0$. Karena setiap ring simetrik merupakan ring abelian. Sehingga $Rea = eRa = 0$. Dengan mengalikan b disisi kiri maka didapat $beRa = 0$, karena $b = be$ menyebabkan $bRa = 0$. Berdasarkan **Definisi 3.3** jadi R merupakan ring semikomutatif.

$3 \Longrightarrow 4$

Misalkan R merupakan ring semikomutatif dan p.p-ring. Karena setiap ring semikomutatif merupakan ring abelian. Dan jika R merupakan ring abelian dan p.p-ring maka R merupakan ring armendariz. Sehingga Untuk sembarang $f(x) = a_0 + a_1 x + \ ... + a_n x^n$ dan $g(x) = b_0 + b_1 x + \ ... + b_m x^m$ dengan $f(x) \cdot g(x) = 0$ dimana $f(x)g(x) \in R[X]$. maka $a_i b_j = 0, \forall\, i, j,$

$4 \Longrightarrow 5$

Misalkan R merupakan ring armendariz dan p.p-ring. Karena setiap ring armendariz merupakan ring abelian. Dan jika R merupakan ring abelian dan p.p-ring maka R merupakan ring armendariz deret pangkat. Sehingga untuk sembarang $f(x) = a_0 + a_1 x + \ ... + a_n x^n$ dan $g(x) = b_0 + b_1 x + \ ... + b_m x^m$ dengan $f(x) \cdot m(x) = 0$ dimana $f(x)g(x) \in R[[X]]$. maka $a_i b_j = 0$, $\forall\ 1 \le i \le \infty, 1 \le j \le \infty$

$5 \Longrightarrow 6$

Misalkan R merupakan ring armendariz deret pangkat dan p.p-ring. Berdasarkan **akibat 2.6** maka R merupakan ring abelian

$6 \Longrightarrow 1$

Misalkan R merupakan ring abelian dan p.p-ring , berdasarkan **lemma 2.4** maka R merupakan ring tereduksi.

Terdapat suatu konsep perluasan konsep dari ring abelian yang dipadukan dengan konsep modul yaitu modul abelian. Secara eksplisit modul abelian didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.9

M R-modul disebut abelian jika untuk suatu $m \in M$ dan $a \in R$, suatu $e \in R$, berlaku $aem = eam$.

Lemma 2.10

1. Jika R adalah ring abelian maka M R-modul adalah abelian
2. Jika R adalah ring abelian maka R R-modul adalah suatu modul abelian

contoh bahwa ada suatu modul abelian atas suatu ring non-abelian R.

Contoh 2.11

Misalkan F suatu field. Pandang matriks segitiga atas berukuran 2×2 suatu ring $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ dan suatu modul kanan $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$. Sekarang misalkan $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$, karena $e^2 = e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$ maka e suatu 6dempotent di R. Ambil sembarang $a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$, perhatikan bahwa,

3. $ae = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. $ea = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Diperoleh bahwa $ae \neq ea$ artinya ada suatu 6dempotent $e \in R$ bukan *central* mengakibatkan R bukan suatu ring abelian.

Untuk menunjukan M suatu modul abelian ambil sembarang $m = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \in M$ dan $a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$ dan $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$. Perhatikan bahwa

$$mae = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

$$mea = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

Diperoleh bahwa $mae = mea$ menunjukkan bahwa M suatu R-modul abelian.

Lemma 2.12

1. Jika M R-modul suatu modul abelian maka submodul dari M R-modul juga modul abelian.
2. Jika M dan M' adalah R-modul abelian dan $\phi : M \to M'$ merupakan homomorfisma modul maka ker (ϕ) dan $Im(\phi)$ merupakan modul abelian.
3. Jika R suatu ring dan $M_1, M_2, \ \ldots \ , M_n$ merupakan modul-modul abelian atas R maka *direct product* dari keluarga modul $M_1, M_2, \ \ldots \ , M_n$ atas R merupakan modul abelian .
4. Jika R suatu ring dan $M_1, M_2, \ \ldots \ , M_n$ merupakan modul-modul abelian atas R maka *direct sum* dari keluarga modul $M_1, M_2, \ \ldots \ , M_n$ atas R merupakan modul abelian .

Lemma 2.13

1. Jika M R-modul adalah modul semikomutatif maka M R-modul adalah modul abelian.
2. Jika M R-modul adalah suatu $p.p.$-modul dan modul abelian maka M R-modul adalah modul semikomutatif.

Lemma- lemma dibawah ini menunjukkan bahwa setiap modul semikomutatif, setiap modul tereduksi, setiap modul armendariz, setiap modul armendariz deret pangkat, dan setiap modul simetrik merupakan modul abelian dan menunjukkan terdapat hubugan antara antara modul abelian dengan modul semikomutatif, modul tereduksi, modul armendariz, modul armendariz deret pangkat, dan modul simetrik.

Lemma 2.14

1. Jika M R-modul merupakan modul tereduksi maka M R-modul merupakan modul abelian.
2. Jika M R-modul merupakan p.p-modul dan modul abelian maka M R-modul adalah modul tereduksi.

Lemma 2.15

1. Jika M R-modul adalah armendariz maka M R-modul adalah modul abelian.
2. Jika M R-modul adalah $p.p.$-modul dan modul abelian maka M R-modul adalah modul armendariz.

Akibat 2.16

1. Jika M R-modul adalah modul armendariz dari deret pangkat maka M adalah abelian.
2. Jika M R-modul adalah $p.p.$-modul dan modul abelian maka M R-modul adalah modul armendariz deret pangkat.

Lemma 2.17

1. Jika M R-modul merupakan modul simetrik maka M R-modul merupakan modul abelian.

2. Jika M R-modul merupakan p.p-modul dan modul abelian maka M R-modul adalah modul simetrik.

Contoh 2.18

Ada suatu modul abelian yang bukan merupakan armendariz, semikomutatif dan tereduksi.

Misalkan $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a \equiv d \; mod2, b \equiv c \equiv 0 \; mod2 \right\}$ suatu ring matriks atas Z, membentuk modul atas dirinya sendiri, M R-modul. Karena $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ elemen idempotent di R, ambil sembarang $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R$ dan $\begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix} \in M$. Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix}$$

Oleh karena itu M R-modul abelian.

Untuk $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \in R$dan $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M$, didapat $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tetapi $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, untuk suatu $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$. Sehingga M R-modul tidak semikomutatif.

Misalkan

$$m(x) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \in M[X]$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \in R[X]$$

Dengan $f(x)m(x) = 0$, tetapi $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Oleh karena itu M R-modul bukan merupakan modul armendariz.
Karena untuk setiap modul tereduksi adalah modul semikomutatif, maka M R-modul bukan merupakan modul tereduksi.

Teorema 2.20
Misalkan M R-modul merupakan p.p-modul. Maka pernyataan berikut ekuivalen:
1. M R-modul adalah modul tereduksi
2. M R-modul adalah modul simetrik
3. M R-modul adalah modul semikomutatif
4. M R-modul adalah modul armendariz
5. M R-modul adalah modul armendariz deret pangkat
6. M R-modul adalah modul abelian

Bukti:
$1 \Longrightarrow 2$
Misalkan M R-modul merupakan modul tereduksi dan p.p-modul. Ambil sembarang $m \in M$ dan $a, b \in R$ dengan $bam = 0$, karena M R-modul suatu p.p-modul, $b \in l_R(am) = Re$, untuk suatu idemmpoten $e \in R$, mengakibatkan $eam = 0$ dan $b = be$. Karena M R-modul merupakan modul tereduksi, tidak sulit untuk menunjukkan bahwa M R-modul merupakan modul semikomutatif sehingga didapat $eaRm = 0$. Untuk $b \in R$ perhatikan bahwa,

$$eabm = abem = abm = 0$$

Oleh karena $abm = 0$ maka M R-modul merupakan modul simetrik
$2 \Longrightarrow 3$
Misalkan M R-modul merupakan modul simetrik dan p.p-modul. Ambil sembarang $m \in M$ dan $a \in R$ dengan $am = 0$. Karena M R-modul adalah p.p-modul maka $a \in l_R(m) = Re$ untuk suatu 9dempotent $e \in R$ akibatnya $em = 0$ dan $a = ae$, ini berarti $Rem = 0$. Karena setiap M R-modul simetrik merupakan M R-modul abelian. Sehingga $Rem = eRm = 0$. Dengan mengalikan a disisi kiri maka didapat $aeRm = 0$, karena $a = ae$ menyebabkan $aRm = 0$. Jadi M R-modul merupakan modul semikomutatif.
$3 \Longrightarrow 4$
Misalkan M R-modul merupakan modul semikomutatif dan p.p-modul. Karena setiap M R-modul semikomutatif merupakan M R-modul abelian. Dan jika M R-modul merupakan modul abelian dan p.p-modul maka M R-modul

merupakan modul armendariz. Sehingga untuk sembarang $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ dan $m(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ dengan $f(x)m(x) = 0$ dimana $f(x) \in R[X]$ dan $g(x) \in M[X]$ maka $a_ib_j = 0, \forall\, i, j$.

$4 \Longrightarrow 5$

Misalkan M R-modul merupakan modul armendariz dan p.p-modul. Karena setiap M R-modul armendariz merupakan M R modul abelian. Dan jika M R-modul merupakan modul abelian dan p.p-modul maka M R-modul merupakan modul armendariz deret pangkat. Sehingga untuk sembarang $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ dan $m(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ dengan $f(x)m(x) = 0$ dimana $f(x) \in R[[X]]$ dan $g(x) \in M[[X]]$ maka $a_jm_i = 0,\ \forall\, 1 \leq i \leq \infty, 1 \leq j \leq \infty$.

$5 \Longrightarrow 6$

Misalkan M R-modul merupakan modul armendariz deret pangkat dan p.p-modul, berdasarkan **akibat 2.16** maka M R-modul merupakan modul abelian.

$6 \Longrightarrow 1$

Misalkan M R-modul merupakan modul abelian dan p.p-modul, berdasarkan **lemma 2.14** maka M R-modul merupakan modul tereduksi.

3. KESIMPULAN

1. Setiap ring tereduksi, setiap ring semikomutatif, setiap ring armendariz, setiap ring armendariz deret pangkat, dan ring simetrik merupakan ring abelian.
2. Terdapat hubungan antara ring abelian, ring semikomutatif, ring simetrik, ring tereduksi, ring armendariz, ring armendariz deret pangkat. Hubungan tersebut terdapat dalam pernyataan ekuivalen berikut :

   Misalkan suatu ring R merupakan p.p-ring Maka
   1. R adalah ring tereduksi
   2. R adalah ring simetrik
   3. R adalah ring semikomutatif
   4. R adalah ring armendariz
   5. R adalah ring armendariz deret pangkat
   6. R adalah ring abelian
3. Setiap modul tereduksi, setiap modul semikomutatif, setiap modul armendariz, setiap modul armendariz deret pangkat, dan setiap modul simetrik merupakan modul abelian.

4. Terdapat hubungan antara modul abelian dengan modul semikomutatif, modul tereduksi, modul armendariz, modul armendariz deret pangkat, dan modul simetrik. Hubungan tersebut terdapat dalam pernyataan ekuivalen berikut :

   Misalkan M R-modul merupakan p.p-modul, maka
   1. M R-modul adalah modul tereduksi
   2. M R-modul adalah modul simetrik
   3. M R-modul adalah modul semikomutatif
   4. M R-modul adalah modul armendariz
   5. M R-modul adalah modul armendariz deret pangkat
   6. M R-modul adalah modul abelian

DAFTAR PUSTAKA

Adkins William A. and Weintraub Steven H. (1992). *Algebra: an Approach via Module Theory*. United States : Springer-Verlag.

Agayev, N. *et al*, .(2009). *Abelian modules*. Acta math.univ. Comenianae. Vol. LXXVIII, (2), pp, 235-244. [Online]. Tersedia:http://www.emis.de/journals/AMUC/_vol-78/_no_2/halilioglu.pdf. [februari 2012].

Agayev, N. *et al*,.(2010). *on abelian ring*. Turk J Math. (34), 465-474.[Online].Tersedia:http://www.journal.tubitak.gov.tr/mth/issues/mat-1034-4/mat-34-4-4-0711-1.pdf. [februari 2012].

Herstein, I. N. (1975). *Topic in Algebra*. New York: John Wiley and Sons.

Hungerford, T. W. (1996). *Graduate Texts in Mathematics*. New York: Springer.

Wahyudin. (2000). *Pengantar Aljabar Abstrak.* Bandung: CV Delta Bawean.