

SIFAT ARMENDARIZ PADA BEBERAPA RING GRUP

oleh :

Mulvi Ludiana (1)

Cece Kustiawan (2)

Sumanang Muhtar Gozali (2)

ABSTRAK

Dari suatu ring dan grup, dapat dikonstruksi suatu ring baru yang disebut ring grup. Ring grup merupakan himpunan semua jumlah formal hasil perkalian elemen-elemen ring dan grup dimana elemen-elemen pada grup bisa dianggap sebagai basis dan elemen pada ring sebagai skalar. Selanjutnya, pada makalah ini ditunjukkan bahwa ring grup yang dibentuk oleh ring bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan grup hingga $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5$ serta S_3 memenuhi sifat Armendariz.

1 Pendahuluan

Suatu ring R disebut ring tereduksi jika tidak mempunyai elemen nilpoten tak nol. Secara ekuivalen, suatu ring dikatakan tereduksi jika tidak mempunyai elemen dengan kuadrat nol, yaitu jika $x^2 = 0$ maka $x = 0$. Dari sifat tersebut, diperoleh bahwa jika $ab = 0$, maka $ba = 0$ (diketahui $ab = 0$, maka $(ba)^2 = baba = b.0.a = 0$ berakibat $ba = 0$).

Contoh dari ring tereduksi adalah ring bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan ring kuosien $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dimana n adalah bilangan bulat *square free*. Secara umum, setiap daerah integral merupakan ring tereduksi.

Pada tahun 1973 Efraim P. Armendariz membuktikan suatu lema yang berhubungan dengan ring tereduksi, yaitu sebagai berikut.

Lema 1.1. (*E. P. Armendariz, 1974*)

Misalkan R adalah ring tereduksi dan $f(x), g(x) \in R[x]$, dengan $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$. Maka $f(x)g(x) = 0$ jika dan hanya jika $a_ib_j = 0$ untuk setiap $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m$.

Berdasarkan lema di atas, M. B. Rege dan Sima Chhawchharia pun membuat definisi ring Armendariz sebagai berikut.

Definisi 1.2. (M. B. Rege dan Sima Chhawchharia, 1997)

Suatu ring R dikatakan mempunyai sifat Armendariz (atau suatu ring Armendariz)

jika polinomial $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m \in R[x]$ memenuhi $f(x)g(x) = 0$, diperoleh $a_ib_j = 0$ untuk setiap i, j .

Jadi, setiap ring tereduksi merupakan ring Armendariz. Akibatnya, ring bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan ring kuosien $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dengan n bilangan bulat *square free* pun menjadi contoh ring Armendariz.

Proposisi berikut memberikan hasil yang lebih umum mengenai ring $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_n$.

Proposisi 1.3. (*M. B. Rege dan Sima Chhawchharia, 1997*)

Untuk setiap bilangan bulat n , $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ adalah suatu ring Armendariz, dimana bukan merupakan ring tereduksi ketika n adalah bilangan bulat yang bukan square free.

Hasil yang lebih umum dari lema di atas menghasilkan adalah teorema berikut.

Teorema 1.4. (*M. B. Rege dan Sima Chhawchharia, 1997*)

Jika R adalah daerah ideal utama (PID) komutatif dan A adalah ideal dari R , maka R/A adalah Armendariz.

Untuk contoh-contoh ring Armendariz selanjutnya, Rege dan Sima menggunakan prinsip idealisasi dari M. Nagata sebagai berikut.

1. Misalkan R ring komutatif dan M adalah R -modul. Dinotasikan dengan $R(+)M$, R -modul $R \oplus M$ memberikan struktur ring dimana perkalian didefinisikan dengan

$$(a, m)(b, n) = (ab, an + bm).$$

2. Misalkan R ring dan A ideal dari R . Ring kuosien $\bar{R} = R/A$ mempunyai struktur alami pada R -bimodul kiri dan kanan. Dinotasikan $\bar{a} = a + A \in R/A$ untuk setiap $a \in R$. Definisikan operasi perkalian pada $R \oplus (R/A)$ sebagai berikut.

$$(r, \bar{a})(r', \bar{a}') = (rr', \overline{ra' + ar'}).$$

Notasi yang digunakan adalah $R(+)R/A$ dengan sifat yang mirip dengan $R(+)M$.

Teorema 1.5. (M. B. Rege dan Sima Chhawchharia, 1997)

Misalkan R domain dan A ideal dari R . Misalkan R/A Armendariz. Maka $R(+)R/A$ adalah Armendariz.

Sebagai kasus khusus dari teorema 1.5, diperoleh akibat berikut.

Akibat 1.6. (M. B. Rege dan Sima Chhawchharia, 1997)

$\mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ adalah ring Armendariz untuk setiap bilangan bulat n .

Untuk selanjutnya, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ditulis $\mathbb{Z}_n$.

Dari Teorema 1.5, diperoleh bahwa jika R adalah daerah integral maka $R(+)R$ (dengan memilih $\{0\}$ sebagai ideal dari R) adalah Armendariz. Hasil ini dapat diperluas untuk ring tereduksi, dengan sifat yang akan digunakan adalah sebagai berikut.

1. Jika R tereduksi dan $a, b \in R$, maka $ab = 0$ jika dan hanya jika $ba = 0$.
2. Ring tereduksi adalah ring Armendariz.
3. Jika R tereduksi, maka $R[x]$ juga tereduksi.

Proposisi 1.7. (M. B. Rege dan Sima Chhawchharia, 1997)

Misalkan R adalah ring tereduksi. Maka ring $R(+)R$ adalah Armendariz.

Hasil yang lebih umum dari Proposisi 1.7 adalah proposisi berikut.

Proposisi 1.8. (M. B. Rege dan Sima Chhawchharia, 1997)

Misalkan R ring tereduksi dan A ideal dari R sedemikian sehingga R/A tereduksi. Maka $R(+)R/A$ adalah Armendariz.

Kim dan Lee memberikan contoh lain dari ring Armendariz. Misalkan R tereduksi dan S subring dari matriks segitiga atas $T_3(R)$, yaitu

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in R \right\}.$$

Berikut merupakan penjelasan rinci dari dua contoh ring Armendariz.

1. Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$

Ambil $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m \in \mathbb{Z}[x]$. Karena $\mathbb{Z}$ daerah integral, diperoleh $\mathbb{Z}[x]$ daerah integral sehingga untuk $f(x)g(x) = 0$ haruslah $f(x) = 0$ atau $g(x) = 0$. Jadi, pada $\mathbb{Z}[x]$ diperoleh $f(x)g(x) = 0$ jika $f(x) = 0$ atau $g(x) = 0$ dan jelas diperoleh $a_ib_j = 0$ untuk setiap i, j .

2. Himpunan ring kuosien $\mathbb{Z}_4$

Misalkan $f(x) = \overline{a_0} + \overline{a_1}x + \dots + \overline{a_n}x^n$, $g(x) = \overline{b_0} + \overline{b_1}x + \dots + \overline{b_m}x^m \in \mathbb{Z}_4[x]$ dan memenuhi $f(x)g(x) = \overline{0}$.

$$\begin{aligned}\overline{0} &= f(x)g(x) \\ &= \overline{a_0b_0} + (\overline{a_0b_1} + \overline{a_1b_0})x + \dots + \overline{a_nb_mx^{n+m}}.\end{aligned}$$

Artinya,

$$\overline{a_0b_0} = \overline{0}, \quad (1.1)$$

$$\overline{a_0b_1 + a_1b_0} = \overline{0}, \quad (1.2)$$

$$\overline{a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0} = \overline{0}, \quad (1.3)$$

$\vdots$

$$\overline{a_nb_m} = \overline{0}. \quad (1.4)$$

Persamaan 1.1 hanya bisa dipenuhi oleh $\overline{a_0} = \overline{2}$ dan $\overline{b_0} = \overline{2}$ (untuk $\overline{a_0}, \overline{b_0} \neq \overline{0}$). Selanjutnya, substitusi nilai tersebut ke persamaan 1.2 sehingga

$$\begin{aligned}\overline{0} &= \overline{a_0b_1 + a_1b_0} \\ &= \overline{2\overline{b_1} + \overline{a_1}2} \\ &= \overline{2(\overline{b_1} + \overline{a_1})}.\end{aligned}$$

Persamaan $(\overline{b_1} + \overline{a_1})$ haruslah bernilai genap, dimana dapat dipenuhi oleh $\overline{a_1} = \overline{2k_{a_1} + 1}$, $\overline{b_1} = \overline{2k_{b_1} + 1}$ (keduanya ganjil) atau $\overline{a_1} = \overline{2k_{a_1}}$, $\overline{b_1} = \overline{2k_{b_1}}$ (keduanya genap).

Untuk kasus keduanya ganjil, ketika disubstitusi ke persamaan 1.3 akan menghasilkan suatu kontradiksi. Artinya, penyelesaian $\overline{a_1}, \overline{b_1}$ bernilai ganjil tidak memenuhi, haruslah $\overline{a_1}, \overline{b_1}$ bernilai genap.

Untuk proses selanjutnya, akan selalu terdapat dua pasangan pilihan untuk a_i, b_i , yaitu keduanya ganjil atau keduanya genap. Jika dipilih a_i, b_i ganjil, maka kembali akan mengakibatkan kontradiksi ketika ada perkalian $a_i b_i$ sehingga haruslah a_i, b_i genap, untuk setiap i, j . Jadi, diperoleh $a_i b_j = \overline{0}$ untuk setiap i, j .

Pada bagian selanjutnya, akan dikonstruksi ring grup dari ring bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan grup hingga $\mathbb{Z}_n$ serta grup S_3 dan diperiksa apakah ring grup tersebut merupakan ring Armendariz atau bukan.

2 Ring Grup dan Ring Armendariz

Misalkan R suatu ring komutatif dengan elemen kesatuan dan $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ adalah grup berhingga. *Ring grup* RG dari G dengan koefisien pada R adalah himpunan semua jumlah formal

$$RG = \{a_1 g_1 + a_2 g_2 + \dots + a_n g_n \mid a_i \in R, g_i \in G \text{ untuk setiap } i\}$$

yang dilengkapi dengan operasi-operasi

$$\begin{aligned} (a_1 g_1 + \dots + a_n g_n) + (b_1 g_1 + \dots + b_n g_n) &= (a_1 + b_1) g_1 + \dots + (a_n + b_n) g_n, \\ (a_1 g_1 + \dots + a_n g_n)(b_1 g_1 + \dots + b_n g_n) &= c_1 g_1 + \dots + c_k g_k + \dots + c_n g_n, \end{aligned}$$

dimana $c_k = \sum_{g_i g_j = g_k} a_i b_j$.

Sebagai contoh, misalkan $G = S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$, himpunan permutasi dari $\{1, 2, 3\}$ dan $R = \mathbb{Z}$ sehingga diperoleh

$$\mathbb{Z}S_3 = \{a_1(1) + a_2(12) + a_3(13) + a_4(23) + a_5(123) + a_6(132) \mid a_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq 6\}.$$

Ambil $\alpha = (1) + 5(12) - 2(23)$, $\beta = 5(1) + 3(123) \in \mathbb{Z}S_3$. Maka

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= ((1) + 5(12) - 2(23)) + (5(1) + 3(123)) \\ &= 6(1) + 5(12) - 2(23) + 3(123) \\ \alpha\beta &= ((1) + 5(12) - 2(23))(5(1) + 3(123)) \\ &= (1)(5(1) + 3(123)) + 5(12)(5(1) + 3(123)) - 2(23)(5(1) + 3(123)) \\ &= 5(1) + 3(123) + 25(12) + 15(23) - 10(23) - 6(13) \\ &= 5(1) + 25(12) - 6(13) + 5(23) + 3(123).\end{aligned}$$

Selanjutnya, pada bagian ini disajikan dua buah konstruksi dari ring grup dan hubungannya dengan ring Armendariz.

2.1 Ring Grup $\mathbb{Z}\mathbb{Z}_3$ dan $\mathbb{Z}\mathbb{Z}_5$

Konstruksi suatu ring grup RG dengan $R = \mathbb{Z}$ dan $G = \mathbb{Z}_n/\{0\}$ dengan operasi perkalian, dimana n adalah bilangan prima selain dua. Maka

$$\mathbb{Z}\mathbb{Z}_n = \{a_1\bar{1} + a_2\bar{2} + \dots + a_{n-1}\overline{n-1} \mid a_i \in \mathbb{Z} \text{ untuk setiap } i\}.$$

Akan diperiksa apakah $\mathbb{Z}\mathbb{Z}_n$ adalah ring Armendariz atau bukan, tetapi hanya untuk $n = 3$ dan $n = 5$.

Untuk $n = 3$, diketahui

$$\mathbb{Z}\mathbb{Z}_3 = \{a_1\bar{1} + a_2\bar{2} \mid a_1, a_2 \in R\}.$$

Akan diperiksa apakah $\mathbb{Z}\mathbb{Z}_3$ adalah ring tereduksi atau bukan.

Ambil $a = a_1\bar{1} + a_2\bar{2} \in \mathbb{Z}\mathbb{Z}_3$. Akan diperiksa apakah $a^2 = 0$ mengakibatkan $a = 0$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}0 &= a^2 \\ &= (a_1\bar{1} + a_2\bar{2})^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2)\bar{1} + 2a_1a_2\bar{2}\end{aligned}$$

yang akan terpenuhi jika $a_1^2 + a_2^2 = 0$ dan $2a_1a_2 = 0$. Dari $a_1^2 + a_2^2 = 0$, diperoleh $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ yang berarti $a = 0$. Jadi, $\mathbb{Z}\mathbb{Z}_3$ adalah ring tereduksi yang berarti

$\mathbb{ZZ}_3$ adalah ring Armendariz.

Selanjutnya, untuk $n = 5$ diketahui

$$\mathbb{ZZ}_5 = \{a_1\bar{1} + a_2\bar{2} + a_3\bar{3} + a_4\bar{4} \mid a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Z}\}.$$

Akan diperiksa apakah $\mathbb{ZZ}_5$ adalah ring tereduksi atau bukan.

Ambil $a = a_1\bar{1} + a_2\bar{2} + a_3\bar{3} + a_4\bar{4} \in \mathbb{ZZ}_5$. Akan diperiksa apakah $a^2 = 0$ mengakibatkan $a = 0$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 0 &= a^2 \\ &= (a_1\bar{1} + a_2\bar{2} + a_3\bar{3} + a_4\bar{4})^2 \\ &= (a_1^2 + 2a_2a_3 + a_4^2)\bar{1} + (2a_1a_2 + 2a_3a_4)\bar{2} + (2a_1a_3 + 2a_2a_4)\bar{3} + \\ &\quad (2a_1a_4 + a_2^2 + a_3^2)\bar{4} \end{aligned}$$

yang akan terpenuhi jika

$$a_1^2 + 2a_2a_3 + a_4^2 = 0 \tag{2.1}$$

$$2a_1a_2 + 2a_3a_4 = 0 \tag{2.2}$$

$$2a_1a_3 + 2a_2a_4 = 0 \tag{2.3}$$

$$2a_1a_4 + a_2^2 + a_3^2 = 0. \tag{2.4}$$

Dengan proses eliminasi persamaan 2.2 dan 2.3, diperoleh

$$0 = 2(a_1 - a_4)(a_2 - a_3).$$

Maka nilai yang memenuhi adalah $a_2 = a_3$ atau $a_1 = a_4$. Pilih $a_2 = a_3$ dan substitusikan ke persamaan 2.2 sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} a_1a_2 + a_2a_4 &= 0 \\ (a_1 + a_4)a_2 &= 0. \end{aligned}$$

Nilai yang memenuhi adalah $a_1 = -a_4$ atau $a_2 = 0$. Pilih $a_1 = -a_4$ dan substitusikan ke persamaan 2.1 sehingga diperoleh

$$a_1^2 + a_2^2 = 0$$

yang dipenuhi oleh $a_1 = 0$, $a_2 = 0$. Karena $a_1 = -a_4$ dan $a_2 = a_3$, maka diperoleh $a_4 = -a_1 = 0$ dan $a_3 = a_2 = 0$ yang berarti $a = 0$. Jadi, $\mathbb{Z}\mathbb{Z}_5$ adalah ring tereduksi yang berarti $\mathbb{Z}\mathbb{Z}_5$ adalah ring Armendariz.

2.2 Ring Grup $\mathbb{Z}S_3$

Konstruksi suatu ring grup RG dengan $R = \mathbb{Z}$ dan $G = S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$ dengan operasi komposisi. Maka

$$\mathbb{Z}S_3 = \{a_1(1) + a_2(12) + a_3(13) + a_4(23) + a_5(123) + a_6(132) \mid a_i \in \mathbb{Z} \text{ untuk setiap } i\}.$$

Akan diperiksa apakah $\mathbb{Z}S_3$ adalah ring Armendariz atau bukan. Pertama akan dilihat apakah $\mathbb{Z}S_3$ adalah ring tereduksi atau bukan. Ambil $a = a_1(1) + a_2(12) + a_3(13) + a_4(23) + a_5(123) + a_6(132) \in \mathbb{Z}S_3$. Akan diperiksa apakah $a^2 = 0$ menyebabkan $a = 0$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 0 &= a^2 \\ &= (a_1(1) + a_2(12) + a_3(13) + a_4(23) + a_5(123) + a_6(132))^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + 2a_5a_6)(1) \\ &\quad + (2a_1a_2 + a_3a_5 + a_4a_6 + a_5a_4 + a_6a_3)(12) \\ &\quad + (2a_1a_3 + a_2a_6 + a_4a_5 + a_5a_2 + a_6a_4)(13) \\ &\quad + (2a_1a_4 + a_2a_5 + a_3a_6 + a_5a_3 + a_6a_2)(23) \\ &\quad + (2a_1a_5 + a_2a_4 + a_3a_2 + a_4a_3 + a_6^2)(123) \\ &\quad + (2a_1a_6 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_2 + a_5^2)(132). \end{aligned}$$

Artinya,

$$0 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + 2a_5a_6 \quad (2.5)$$

$$0 = 2a_1a_2 + a_3a_5 + a_4a_6 + a_5a_4 + a_6a_3 \quad (2.6)$$

$$0 = 2a_1a_3 + a_2a_6 + a_4a_5 + a_5a_2 + a_6a_4 \quad (2.7)$$

$$0 = 2a_1a_4 + a_2a_5 + a_3a_6 + a_5a_3 + a_6a_2 \quad (2.8)$$

$$0 = 2a_1a_5 + a_2a_4 + a_3a_2 + a_4a_3 + a_6^2 \quad (2.9)$$

$$0 = 2a_1a_6 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_2 + a_5^2. \quad (2.10)$$

Ubah persamaan 2.6, 2.7 dan 2.9 menjadi

$$0 = 2a_1a_2 + (a_3 + a_4)(a_5 + a_6) \quad (2.11)$$

$$0 = 2a_1a_3 + (a_2 + a_4)(a_5 + a_6) \quad (2.12)$$

$$0 = 2a_1a_4 + (a_2 + a_3)(a_5 + a_6). \quad (2.13)$$

Selanjutnya, kurangi persamaan 2.9 oleh persamaan 2.10, sehingga diperoleh

$$2a_5a_6 = 2a_1(a_5 - a_6) + (a_5^2 + a_6^2) \quad (2.14)$$

Substitusi persamaan 2.14 ke persamaan 2.5 sehingga diperoleh

$$0 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + 2a_1(a_5 - a_6) + (a_5^2 + a_6^2). \quad (2.15)$$

Selanjutnya kurangi persamaan 2.11 dari 2.12

$$\begin{aligned} 0 &= 2a_1(a_2 - a_3) - (a_2 - a_3)(a_5 + a_6) \\ 0 &= (a_2 - a_3)(2a_1 - a_5 - a_6) \end{aligned}$$

dengan solusi $a_2 - a_3 = 0$ atau $2a_1 - a_5 - a_6 = 0$. Pilih $2a_1 - a_5 - a_6 = 0$, yang berarti

$$2a_1 = a_5 + a_6. \quad (2.16)$$

Substitusi persamaan 2.16 ke persamaan 2.15 sehingga diperoleh

$$0 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + 2a_5^2. \quad (2.17)$$

Kurangi persamaan 2.17 oleh 2.5 sehingga diperoleh $2a_5^2 = 0$ yang berarti $a_5 = 0$. Substitusikan nilai $a_5 = 0$ ke 2.14 sehingga diperoleh

$$0 = (2a_1 - a_6)a_6.$$

dengan solusi $2a_1 = a_6$ atau $a_6 = 0$. Pilih $2a_1 = a_6$ dan substitusikan ke persamaan 2.11 dan diperoleh

$$0 = (a_2 + a_4 + a_3)a_6.$$

Pilih $a_6 = 0$, yang berarti $a_1 = 0$. Kemudian substitusi ke persamaan 2.5

$$\begin{aligned} 0 &= 0^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + 2 \cdot 0 \cdot a_6 \\ 0 &= a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \end{aligned}$$

yang hanya bisa dipenuhi oleh $a_2 = a_3 = a_4 = 0$.

Diperoleh $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$, yang berarti $a = 0$. Jadi, $\mathbb{Z}S_3$ adalah ring tereduksi yang berarti $\mathbb{Z}S_3$ adalah ring Armendariz.

3 Penutup

Dari uraian pada bagian 2, diperoleh hasil bahwa konstruksi ring grup $\mathbb{Z}\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}\mathbb{Z}_5$ dan $\mathbb{Z}S_3$ adalah ring Armendariz. Sepengetahuan penulis, belum diketahui apakah fakta ini berlaku juga untuk $\mathbb{Z}\mathbb{Z}_n$ dengan n prima dan $\mathbb{Z}S_n$ untuk n yang lebih umum. Oleh karena itu, hal tersebut dapat digunakan untuk kajian lanjutan tentang ring grup dan ring Armendariz.

DAFTAR PUSTAKA

- Adkins, W.A. dan Weintraub, S.H. (1992). *Algebra An Approach via Module Theory*. New York: Springer-Verlag.
- Antonie, R. (2009), "Examples of Armendariz Rings".
- Armendariz, E.P. (1974), "A Note on Extensions of Baer and P.P. Rings". *Journal of the Australian Mathematical Society*. 18, 470-473.
- Dummit, D.S. dan Foote, R.M. (2004). *Abstract Algebra* (Third ed.). USA : John Wiley and Sons, Inc.

Kim, N. K. dan Lee, Y. (2000), "Armendariz Rings and Reduced Rings". *Journal of Algebra*. 223, 477-488.

Nagata, M. (1962). *Local Ring*. Kyoto: Universitas Kyoto.

Rege, M.B. dan Chhawchharia, S. (1997), "Armendariz Ring". *Proc. Japan Academy Ser. A. Math. Sci.*. 73A, 14-17.

Wikipedia. (2012). *Reduced Ring*, [Online]. Tersedia: http://en.wikipedia.org/wiki/Reduced_ring. [17 April 2012].

Wikipedia. (2012). *Square Free Integer*, [Online]. Tersedia: http://en.wikipedia.org/wiki/Square-free_integer. [18 April 2012].